§7 数列

1. (1) 初項を a，公差を d とおくと

$a_n = a + (n-1)d$

$a_3 = a + 2d = -12 \cdots\cdots ①$

$a_{10} = a + 9d = 37 \cdots\cdots ②$

①,②より　$a = -26,\quad d = 7$

よって $a_n = -26 + (n-1)\cdot 7 = \underline{\underline{\boldsymbol{7n-33}}}$

(2)　$a_n = 7n - 33 = 100$　　より $n = 19$　　$\underline{\underline{\textbf{第 19 項}}}$

(3)　$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + a_n)$

$= \dfrac{1}{2}n(-26 + 7n - 33) = \underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(7n-59)}}}$

(4)　$S = S_{20} - S_9$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 20(7\cdot 20 - 59) - \dfrac{1}{2}\cdot 9(7\cdot 9 - 59) = \underline{\underline{\mathbf{792}}}$

♡別解

初項 $a_{10} = 37$, 末項 $a_{20} = 107$, 項数 11 個の和なので

$\dfrac{1}{2}\cdot 11(37 + 107) = 792$

2. (1) 初項を a，公差を d とおくと

$a_n = a + (n-1)d$

$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + a_n) = \dfrac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

条件より

$a_5 = a + 4d = 5 \cdots\cdots ①$

$S_5 = \dfrac{1}{2}\cdot 5(2a + 4d) = 5 \qquad \therefore a + 2d = 1 \cdots\cdots ②$

①,②より　$a = -3,\quad d = 2$

よって $a_n = -3 + (n-1)\cdot 2 = \underline{\underline{\boldsymbol{2n-5}}}$

(2)　$41 + 37 + 33 + \cdots\cdots + (-35)$

初項 41, 公差 -4 なので

一般項 $a_n = 41 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 45$

末項 -35 は $-4n + 45 = -35$ より $n = 20$

よって初項 41, 末項 -35, 項数 20 個の等差数列の和なので

$\dfrac{1}{2}\cdot 20(41 - 35) = \underline{\underline{\mathbf{60}}}$

(3) 初項 54，公差 -3 であるから，途中からマイナスになる

$a_n = -3n + 57 \geqq 0$　を調べると $n \leqq 19$

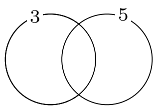
よって第 20 項からはマイナスになってしまうので足したら減る

$a_{18} = 3,\quad a_{19} = 0$ であるから

<u>第 18 項または第 19 項までの和が最大</u> で

和 $S = \dfrac{1}{2}\cdot 19\cdot(54 + 0) = \underline{\underline{\mathbf{513}}}$

3. (1) 3 または 5 の倍数



3 の倍数の和　3,　6,　9,　$\cdots\cdots$, 300

初項 3, 末項 300, 項数 100 個で $\dfrac{1}{2}\cdot 100\cdot(3 + 300) = 15150$

5 の倍数の和　5,　10,　15,　$\cdots\cdots$, 300

初項 5, 末項 300, 項数 60 個で $\dfrac{1}{2}\cdot 60\cdot(5 + 300) = 9150$

15 の倍数の和　15,　30,　45,　$\cdots\cdots$, 300

初項 15, 末項 300, 項数 20 個で $\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot(15 + 300) = 3150$

よって $15150 + 9150 - 3150 = \underline{\underline{\mathbf{21150}}}$

(2)　101,　108,　115,　$\cdots\cdots$　　(初項の 101 は探した)

一般項は $7n + 94$

末項を考える

$7n + 94 \leqq 200$ より $n \leqq \dfrac{106}{7} = 15\dfrac{1}{7}$

よって第 15 項が末項で $7\cdot 15 + 94 = 199$

初項 101, 末項 199, 項数 15 個の等差数列の和なので

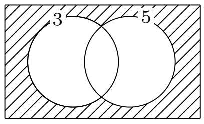
$\dfrac{1}{2}\cdot 15(101 + 199) = \underline{\underline{\mathbf{2250}}}$

(3) 20 以下（20 は後から除く）の数のうち，15 を分母とするものは

$\dfrac{1}{15}, \dfrac{2}{15}, \dfrac{3}{15}, \dfrac{4}{15}, \dfrac{5}{15}, \dfrac{6}{15}, \dfrac{7}{15}, \dfrac{8}{15}, \cdots, \dfrac{299}{15}, \dfrac{300}{15}$

既約分数にしたときに分母が 15 であるのは

このうち分子が 3 の倍数でも 5 の倍数でもないもの



このすべての分数の和は

$\dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{3}{15} + \cdots\cdots + \dfrac{300}{15}$

$= \dfrac{1}{15}(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 300)$

$= \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 300\cdot(1 + 300) = 3010$

この和から分子が 3 または 5 の倍数であるものの和を引けばよい

分子が 3 の倍数であるものの和は (1) より

$\dfrac{3 + 6 + 9 + \cdots\cdots + 300}{15} = \dfrac{15150}{15} = 1010$

分子が 5 の倍数であるものの和は (1) より

$\dfrac{5 + 10 + 15 + \cdots\cdots + 300}{15} = \dfrac{9150}{15} = 610$

分子が 15 の倍数であるものの和は (1) より

$\dfrac{15 + 30 + 45 + \cdots\cdots + 300}{15} = \dfrac{3150}{15} = 210$

よって $3010 - (1010 + 610 - 210) = \underline{\underline{\mathbf{1600}}}$

♡ 別解

分子が 3 または 5 の倍数であるものの和は

(1) より $\dfrac{21150}{15} = 1410$ よって $3010 - 1410 = 1600$

4. (1) 共通に含まれる項を小さい順に並べた数列を $\{c_n\}$ とする

$a_n = 6n - 1,\ b_n = 8n - 1$ より具体的に書いて初項を求めると

$\{a_n\}$ ： 5, 11, 17, 23, 29, $\cdots\cdots$

$\{b_n\}$ ： 7, 15, 23, 31, 39, $\cdots\cdots$

初項は 23 である（もっと書けば第 2 項以降も分かる）

また $\{a_n\}$ の公差は 6 で，$\{b_n\}$ の公差は 8 であるから

$\{c_n\}$ は 6 と 8 の最小公倍数の 24 を公差とする等差数列である

よって $c_n = 23 + (n-1)\cdot 24 = 24n - 1$

500 以下である項を調べると

$c_n = 24n - 1 \leqq 500$ より　$n \leqq \dfrac{167}{8} = 20.8\cdots$

よって第 20 項が末項で $c_{20} = 479$

初項 23, 末項 479, 項数 20 個の等差数列の和なので

$\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot(23 + 479) = \underline{\underline{\mathbf{5020}}}$

(2)　$\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \dfrac{1}{a_3},\ \cdots\cdots$ が等差数列

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると $\{b_n\}$ は等差数列で

$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{3},\quad b_5 = \dfrac{1}{a_5} = \dfrac{1}{2}$

$b_n = \dfrac{1}{3} + (n-1)d$ とおくと

$b_5 = \dfrac{1}{3} + 4d = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore d = \dfrac{1}{24}$

よって $b_n = \dfrac{1}{24}n + \dfrac{7}{24}$

$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n+7}{24}$　　両辺逆数をとって $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n = \dfrac{24}{n+7}}}}$

(3) ♣ 隣り合う項の差が一定であることを示す。

$\{a_n\}$ は等差数列より初項 a, 公差 d とすると

$a_n = a + (n-1)d$ とおける

このとき $\{a_{3n}\}$ の

第 n 項は　　$a_{3n} = a + (3n-1)d$

第 $n+1$ 項は $a_{3(n+1)} = a + \{3(n+1) - 1\}d$　であるから

この差を調べて

$a_{3(n+1)} - a_{3n}$

$= a + \{3(n+1) - 1\}d - \{a + (3n-1)d\}$

$= 3d$　で一定

よって $\{a_{3n}\}$ は公差 $3d$ の等差数列である

5. (1) 初項を a，公比を r とおくと

$a_n = ar^{n-1}$

$a_3 = ar^2 = 12 \cdots\cdots$ ①

$a_6 = ar^5 = 96 \cdots\cdots$ ②

$\dfrac{②}{①}$ より $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{96}{12}$

$r^3 = 8$ 　 r は実数より $r = 2$

①より $a = 3$ 　 $\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}}}$

(2) $3 \cdot 2^{n-1} = 1536$

$2^{n-1} = 512 = 2^9$ 　 $\therefore n - 1 = 9$ 　 $n = 10$

よって 1536 は **第 10 項**

(3) 初項 3, 公比 2, 項数 n 個の等比数列の和なので

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = \underline{\underline{\boldsymbol{3(2^n - 1)}}}$

(4) $S_n = 3(2^n - 1) > 2000$ より $3 \cdot 2^n > 2003$

これを満たす n を調べると

$n = 9$ のとき $3 \cdot 2^9 = 1536$

$n = 10$ のとき $3 \cdot 2^{10} = 3072$

よって $S_n > 2000$ を満たす最小の n は $\underline{\underline{\boldsymbol{n = 10}}}$

6. (1)

(
♣等差中項
a，b，c が等差数列のとき公差が一定
$b - a = c - b$ なので 　 $2b = a + c$ 　 が成り立つ
♣等比中項
a，b，c が等比数列のとき公比が一定
$\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$ なので 　 $b^2 = ac$ 　 が成り立つ
)

a，b，12 が等差数列なので

$2b = a + 12 \cdots\cdots$ ①

4，a，b が等比数列なので

$a^2 = 4 \times b \cdots\cdots$ ②

①,②より $\underline{\underline{\boldsymbol{(a,\ b) = (6,\ 9),\ (-4,\ 4)}}}$

(2) $a_n = ar^{n-1}$ とすると

初項から第 5 項までの和が 2 より

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = 2 \cdots\cdots$ ①

第 6 項から第 10 項までの和が 6 より

$ar^5 + ar^6 + ar^7 + ar^8 + ar^9 = 6$

$\therefore r^5(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4) = 6$

①を代入して

$r^5 \cdot 2 = 6$ 　 $\therefore r^5 = 3$ 　 (r は求めなくてよい)

したがって第 11 項から第 15 項までの和は

$ar^{10} + ar^{11} + ar^{12} + ar^{13} + ar^{14}$

$= r^{10}(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4)$

$= 2(r^5)^2 = 2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{\boldsymbol{18}}}$

(3) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

初項から第 n 項までの積は

$2 \cdot 1 \times 2 \cdot 4 \times 2 \cdot 4^2 \times 2 \cdot 4^3 \times \cdots\cdots \times 2 \cdot 4^{n-1}$

$= 2^n \cdot 4^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$

$= 2^n \cdot 4^{\frac{1}{2}(n-1)n}$

$= 2^n \cdot 2^{(n-1)n} = \underline{\underline{\boldsymbol{2^{n^2}}}}$

7. ♣ $\sum$ には和を簡潔に表すという意味しかないので，

問題を解くときにはどんな和なのかをそのつど判断して求める

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - 3k + 2)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$

$= \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3 \times \dfrac{1}{2}n(n+1) + 2n$

$= \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \dfrac{9}{6}n(n+1) + \dfrac{12}{6}n$ 　 $\longleftarrow$ 通分した

$= \dfrac{1}{6}n\Big\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\Big\}$ 　 $\longleftarrow$ くくった

$= \dfrac{1}{6}n(2n^2 - 6n + 4)$

$= \dfrac{1}{3}n(n^2 - 3n + 2) = \underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)}}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3 - k)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k$

$= \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \dfrac{1}{2}n(n+1)$

$= \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \dfrac{2}{4}n(n+1)$ 　 $\longleftarrow$ 通分した

$= \dfrac{1}{4}n(n+1)\Big\{n(n+1) - 2\Big\}$ 　 $\longleftarrow$ くくった

$= \underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)}}}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1}$ $\longleftarrow$ 初項 2, 公比 3, 項数 n 個の等比数列の和

$= \dfrac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = \underline{\underline{\boldsymbol{3^n - 1}}}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^k$ $\longleftarrow$ 初項 6, 公比 3, 項数 $n-1$ 個の等比数列の和

$= \dfrac{6(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \underline{\underline{\boldsymbol{3(3^{n-1} - 1)}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{3^n - 3}}}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{3k} + 2^{2k-1} - 2}{3^{k+1}}$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{3k} + \frac{1}{2} \cdot 4^k - 2}{3 \cdot 3^k}$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \cdot 9^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

$= \dfrac{3(9^n - 1)}{9 - 1} + \dfrac{\frac{2}{9}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right\}}{\frac{4}{3} - 1} - \dfrac{\frac{2}{9}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \dfrac{3}{8}(9^n - 1) + \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - 1\right\} - \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

$= \underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{3}{8} \cdot 9^n + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} - \dfrac{11}{8}}}}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} |3n - 50|$ 　 $3n - 50 > 0$ より $n > 16.6\cdots$

したがって

$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} |3n - 50|$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{16}(-3n + 50) + \sum_{n=17}^{50}(3n - 50)$

(それぞれ等差の和であるから初項と末項と項数を確認して)

$= \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot (47 + 2) + \dfrac{1}{2} \cdot 34 \cdot (1 + 100)$

$= 392 + 1717 = \underline{\underline{\boldsymbol{2109}}}$

8. (1) $1\cdot2\cdot3,\ \ 2\cdot3\cdot5,\ \ 3\cdot4\cdot7,\ \ 4\cdot5\cdot9,\ \cdots\cdots$

$a_n=n(n+1)(2n+1)=2n^3+3n^2+n$

和 $\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$

$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)\Big\{n(n+1)+(2n+1)+1\Big\}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)}$

(2) $1,\ \ 1+2,\ \ 1+2+4,\ \ 1+2+4+8,\ \cdots\cdots$

$a_n=1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}$

$=\frac{2^n-1}{2-1}$ ⟵ 等比の和として計算した

$=2^n-1$ ⟵ これはまだ a_n

和 $\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$

(3) $1^2,\ \ 1^2+3^2,\ \ 1^2+3^2+5^2,\ \ 1^2+3^2+5^2+7^2,\cdots\cdots$

$a_n=1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ ⟵ これはまだ a_n

和 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3}k^3-\frac{1}{3}k\right)$

$=\frac{4}{3}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)}$

(4) $1^2\cdot n,\ 2^2\cdot(n-1),\ 3^2\cdot(n-2),\ 4^2\cdot(n-3),\cdots\cdots,n^2\cdot1$

まず第 k 項を求める

各項の左側 $1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \ \cdots\cdots$ は k^2

各項の右側 $n,\ \ n-1,\ \ n-2,\ \ \cdots\cdots$ は

初項 n，公差 -1 の等差数列で $n+(k-1)\cdot(-1)=n-k+1$

よって $a_k=k^2(n-k+1)=-k^3+(n+1)k^2$

和 $\sum_{k=1}^{n}\Big\{-k^3+(n+1)k^2\Big\}$ ⟵ n はただの定数

$=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=-\frac{3}{12}n^2(n+1)^2+\frac{2}{12}n(n+1)^2(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\Big\{-3n+2(2n+1)\Big\}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)}$

9. ♣$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n\geqq2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

(1) $2,\ \ 5,\ \ 12,\ \ 23,\ \ 38,\ \cdots\cdots$

$3,\ \ 7,\ \ 11,\ \ 15,$

階差数列が $b_n=4n-1$ なので　$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$

$=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=2n^2-3n+3$

よって $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2n^2-3n+3 & (n\geqq2)\end{cases}$ であるが,

$2n^2-3n+3$ は $a_1=2$ を満たす $\therefore a_n=\boldsymbol{2n^2-3n+3}$

(2) $3,\ \ 33,\ \ 333,\ \ 3333,\ \cdots\cdots$

$30,\ \ 300,\ \ 3000,$

階差数列が $b_n=30\cdot10^{n-1}$ なので

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}30\cdot10^{k-1}$

$=3+\frac{30(10^{n-1}-1)}{10-1}=\frac{10^n-1}{3}$

この式は $a_1=3$ を満たすので $n=1$ のときも成り立つ

よって $a_n=\boldsymbol{\frac{10^n-1}{3}}$

次に初項から第 n 項までの和は

$\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{3}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}1$

↑ 初項 10, 公比 10, 項数 n 個の等比の和

$=\frac{1}{3}\times\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{1}{3}n$

$=\boldsymbol{\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}}$

♡ 別解（階差数列を利用しないでも a_n は求まる）

例えば $a_4=3+30+300+3000$ の形で表せる

$a_n=3+30+300+\cdots\cdots+3\cdot10^{n-1}$

初項 3, 公比 10, 項数 n 個の等比の和

$=\frac{3(10^n-1)}{10-1}=\frac{10^n-1}{3}$

(3) $1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 10,\ \ 23,\ \ 46,\ \cdots\cdots$

$1,\ \ 2,\ \ 6,\ \ 13,\ \ 23$

$1,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 10,$

第 2 階差数列が $c_n=3n-2$ なので

第 1 階差数列 b_n は

$n\geqq2$ のとき

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$

$=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n+3$

この式は $b_1=1$ を満たすので

$b_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n+3$

よって b_n が分かったので

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}k^2-\frac{7}{2}k+3\right)$

$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$

$=\frac{1}{2}n^3-\frac{5}{2}n^2+5n-2$

この式は $a_1=1$ を満たすので

$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n^3-\frac{5}{2}n^2+5n-2}$

10.♣ $a_1=S_1$，$n\geqq2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ を利用

(1) $S_n=n^2-n+1$

$a_1=S_1=1^2-1+1=1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n+1-\Big\{(n-1)^2-(n-1)+1\Big\}$

$=2n-2$

よって $\boldsymbol{a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-2 & (n\geqq2)\end{cases}}$

(2) $S_n = 2^n - 1$

$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 2^n - 1 - \left(2^{n-1} - 1\right)$$
$$= 2^n - 2^{n-1} = 2\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

よって $a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2^{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$

であるが，2^{n-1} は $a_1 = 1$ を満たすので $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}}}$

11. ♣ 一般項が差の形になるので書き並べると消えるタイプ

(1) $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right\}$ より

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots\cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+ \cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3n+1}\right\} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}}}$$

(2) $\dfrac{1}{k^2+2k} = \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right\}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+ \cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right\} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}}}$$

(3) 一般項 $\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$

$$= \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ より}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+ \cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= 2\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{2n}{n+1}}}}$$

(4) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+ \cdots\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}}}$$

(5) $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$ と変形できるので

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{(n+3)(n-1)}{4(n+1)^2}}}}$$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$ を有理化すると $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{60}\left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+ \cdots\cdots+\left(\sqrt{119}-\sqrt{117}\right)+\left(\sqrt{121}-\sqrt{119}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1}+\sqrt{121}\right) = \frac{1}{2}(-1+11) = \underline{\underline{\boldsymbol{5}}}$$

12. ♣ 一般項が (等差)×(等比) である数列の和の求め方

(1) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 5^{k-1}$ とおく。$S - 5S$ より

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot1+2\cdot5+3\cdot5^2+4\cdot5^3+\cdots+\qquad n\cdot5^{n-1} \\ -)\,5S= & \qquad 1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots+(n-1)\cdot5^{n-1}+n\cdot5^n \\ \hline -4S= & 1\cdot1+1\cdot5+1\cdot5^2+1\cdot5^3+\cdots+\qquad 1\cdot5^{n-1}-n\cdot5^n \end{array}$$

この式の中で $1\cdot1+1\cdot5+1\cdot5^2+1\cdot5^3+\cdots+1\cdot5^{n-1}$ は

初項 1, 公比 5, 項数 n 個の等比数列の和なので

$$-4S = \frac{5^n-1}{5-1} - n\cdot 5^n$$
$$= \frac{(1-4n)5^n-1}{4}$$
$$\therefore S = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{(4n-1)5^n+1}{16}}}}$$

(2) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^{k-1}$ とおく。$S - 3S$ より

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1} \\ -)\,3S= & \qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n \\ \hline -2S= & 1\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+\qquad 2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n \end{array}$$

この式の中で

$2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^{n-1}$ は

初項 6 , 公比 3 , 項数 $n-1$ 個の等比数列の和なので

$$-2S = 1 + \frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1} - (2n-1)\cdot 3^n$$
$$= 1 + 3(3^{n-1}-1) - (2n-1)\cdot 3^n$$
$$= 3^n - (2n-1)\cdot 3^n - 2$$
$$= -(2n-2)\cdot 3^n - 2$$
$$\therefore S = \underline{\underline{\boldsymbol{(n-1)\,3^n+1}}}$$

(3) ♣ $\dfrac{k}{2^k} = k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ であるから (等差) × (等比) の和

$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ とおく。$S - \dfrac{1}{2}S$ より

$$\begin{array}{rl} S= & \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots\cdots+\quad\frac{n}{2^n} \\ -)\,\frac{1}{2}S= & \qquad \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}} \\ \hline \frac{1}{2}S= & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\quad\frac{1}{2^n}\quad-\frac{n}{2^{n+1}} \end{array}$$

この式の中で $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ は

初項 $\dfrac{1}{2}$, 公比 $\dfrac{1}{2}$, 項数 n 個の等比数列の和なので

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$$
$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \qquad \therefore S = \underline{\underline{\boldsymbol{2 - \frac{n+2}{2^n}}}}$$

(4) 求める和を S とおく。

(i) $x \neq 1$ のとき　$S-xS$ より

$$\begin{array}{rl} S=&1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+\quad nx^{n-1} \\ -)\quad xS=& \quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \\ \hline (1-x)S=&1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+\quad x^{n-1}-nx^n \end{array}$$

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}$ は

初項 1, 公比 x, 項数 n 個の等比数列の和なので

$$(1-x)S=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n \quad \longleftarrow x \neq 1 \text{ の理由}$$

$$=\frac{1-x^n-n(1-x)x^n}{1-x}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{1-x}$$

$$\therefore S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

(ii) $x=1$ のとき

$$S=1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(i)(ii) より

$$S=\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}} & \boldsymbol{(x \neq 1)} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n+1)} & \boldsymbol{(x=1)} \end{cases}$$

13. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k+4}+\sqrt{3k+1}}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}) \quad \longleftarrow \text{分母を有理化した}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k+4}) \quad \longleftarrow \text{この形がおすすめ}$$

$$=-\frac{1}{3}\Big\{\left(\sqrt{4}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{10}-\sqrt{13}\right)+$$

$$\cdots\cdots+\left(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}\right)+\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+4}\right)\Big\}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{3n+4}\right)}$$

(2) $b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+\cdots\cdots+b_nb_{n+1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_kb_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}3\cdot 2^{k-1}\cdot 3\cdot 2^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}3\cdot 2^{k-1}\cdot 3\cdot 2\cdot 2^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}18\cdot 4^{k-1} \quad \longleftarrow \text{初項 18, 公比 4, 項数 } n \text{ 個の等比数列の和}$$

$$=\frac{18(4^n-1)}{4-1}=\boldsymbol{6(4^n-1)}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}(3k+1)\cdot 3\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(9k+3)\cdot 2^{k-1}$

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k+3)\cdot 2^{k-1}$ とおくと $S-2S$ より

$$\begin{array}{rl} S=&12\cdot1+21\cdot2+30\cdot2^2+\cdots+(9n+3)\cdot2^{n-1} \\ -)\,2S=& \qquad 12\cdot2+21\cdot2^2+\cdots+(9n-6)\cdot2^{n-1}+(9n+3)\cdot2^n \\ \hline -S=&12\cdot1+9\cdot2+9\cdot2^2+\cdots+\quad 9\cdot2^{n-1}-(9n+3)\cdot2^n \end{array}$$

この式の中で

$9\cdot 2+9\cdot 2^2+9\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^{n-1}$ は

初項 18, 公比 2, 項数 $n-1$ 個の等比数列の和なので

$$-S=12+\frac{18(2^{n-1}-1)}{2-1}-(9n+3)\cdot 2^n$$

$$=12+18\cdot 2^{n-1}-18-(9n+3)\cdot 2^n$$

$$=9\cdot 2^n-(9n+3)\cdot 2^n-6$$

$$=(-9n+6)\cdot 2^n-6$$

$$\therefore S=\boldsymbol{(9n-6)\cdot 2^n+6}$$

14. (1) $a_1=S_1=(1+1)^2=4$

$n \geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)^2-n^2=2n+1$

よって $\boldsymbol{a_n=\begin{cases} 4 & (n=1) \\ 2n+1 & (n \geqq 2) \end{cases}}$

(2) ♣ $a_n=2n+1$ は $n \geqq 2$ でしか使えないことに注意

つまり $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$ とはできない

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{2}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{a_ka_{k+1}} \quad \longleftarrow k=1 \text{ だけ } (a_1 \text{ だけ}) \text{ 別扱い}$$

$$=\frac{2}{4\cdot 5}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{10}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}=\boldsymbol{\frac{6n-1}{10(2n+3)}}$$

(3) $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots\cdots+a_{2n-1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_{2k-1} \quad \longleftarrow a_1\text{だけ別扱い}$$

$$=4+\sum_{k=2}^{n}\{2(2k-1)+1\}=4+\sum_{k=2}^{n}(4k-1)$$

$$=4+\sum_{k=1}^{n}(4k-1)-3 \quad \longleftarrow k=1 \text{ からに調整}$$

$$=1+4\times\frac{1}{2}n(n+1)-n=\boldsymbol{2n^2+n+1}$$

15. もとの数列の一般項は $a_n=2n-1$

(1) 第 10 群の 3 番目の数は各群に入っている個数に注目して

$(\,1_コ+2_コ+3_コ+\cdots\cdots+9_コ\,)+3_コ$　番目

$=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot(1+9)+3=48$　番目の数

よって $a_{48}=2\cdot 48-1=\mathbf{95}$

(2) 第 n 群の最後の数は

$1_コ+2_コ+3_コ+\cdots\cdots+n_コ$　番目

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　番目の数

よって $a_{\frac{1}{2}n(n+1)}=2\times\dfrac{1}{2}n(n+1)-1=\boldsymbol{n^2+n-1}$

(3) 第 n 群の最初の数は　$n \geqq 2$ のとき

$\left\{1_コ+2_コ+3_コ+\cdots\cdots+(n-1)_コ\right\}+1_コ$　番目

$=\dfrac{1}{2}(n-1)n+1=\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$　番目の数であるから

$a_{\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1}=2\left(\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+1\right)-1$

$=\boldsymbol{n^2-n+1}$ これは $n=1$ のときも成り立つ

(4) 777 は第 n 群にあるとすると, 第 n 群は

$|n^2-n+1,\ \cdots\cdots,\ 777,\ \cdots\cdots,\ n^2+n-1|$　より

$n^2-n+1 \leqq 777$　を満たす n を探す

(式をいじらずに n に勘で数を代入していくのがおすすめ)

$n=28$ のとき $n^2-n+1=757$　$\longleftarrow$ 第 28 群の最初の数

$n=29$ のとき $n^2-n+1=813$　$\longleftarrow$ 第 29 群の最初の数

$\therefore$ 777 は第 28 群にあり, 第 28 群を調べると

| 757, 759, 761, $\cdots\cdots$, 777, $\cdots\cdots$, 811 | なので

数えると 777 は**第 28 群の 11 番目の数**

(5) 第 n 群は | $n^2-n+1,\ \cdots\cdots,\ n^2+n-1$ | なので

初項 n^2-n+1, 末項 n^2+n-1, 項数 n 個の等差の和

$\dfrac{1}{2}n\left\{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)\right\}=\boldsymbol{n^3}$

(6) 第 1 群から第 n 群にある数の総和は

(第 1 群の和) + (第 2 群の和) + $\cdots\cdots$ + (第 n 群の和) より

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

$=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2}$

♡別解

初項 1, 末項 n^2+n-1, 項数 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 個の等差の和

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)\left\{1+(n^2+n-1)\right\}=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

16. $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{2},\dfrac{1}{2}\ \Big|\ \dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\ \Big|\ \dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\cdots\cdots$

のように仕切りを入れて群数列として考えると

第 n 群には $2n+1$ 個入っている

(1) $\dfrac{10}{10}$ は第 9 群の 10 番目の数なので

$(3_{\text{コ}}+5_{\text{コ}}+7_{\text{コ}}+\cdots\cdots+17_{\text{コ}})+10_{\text{コ}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot(3+17)+10=90 \qquad \therefore$ **第 90 項**

(2) 第 200 項が第何群の何番目かを考える

まず第 n 群の最初の数は第何項かを求めておく

$n \geqq 2$ のとき

$\left\{3_{\text{コ}}+5_{\text{コ}}+7_{\text{コ}}+\cdots\cdots+(2n-1)_{\text{コ}}\right\}+1_{\text{コ}}$ 　番目

$=\dfrac{1}{2}(n-1)(3+2n-1)+1=n^2$

これは $n=1$ のときも成り立つ　$\therefore$ 第 n 群の最初の数は第 n^2 項

第 200 項が第 n 群にあるとすると　$n^2 \leqq 200$　が成り立つので

これを満たす n を探すと

$n=14$ のとき $14^2=196 \qquad n=15$ のとき $15^2=225$

$\therefore$ 第 200 項は第 14 群にある

第 14 群の最初は第 196 項なので

第 200 項は第 14 群の 5 番目の数　よって $\boldsymbol{\dfrac{5}{15}}$

(3) まず第 n 群の和を求める

$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{2(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n+1}{n+1}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1}{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{n+1}=n+1$

第 200 項は第 14 群の 5 番目であるから

初項から第 200 項までの和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{13}(k+1)+\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}\right)$ ⟵14 群だけ別

$=\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot 14+13+\dfrac{15}{15}=$ **105**

17. $\dfrac{1}{2}\ \Big|\ \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{3}{2^2}\ \Big|\ \dfrac{1}{2^3},\ \dfrac{3}{2^3},\ \dfrac{5}{2^3},\ \dfrac{7}{2^3}\ \Big|\ \dfrac{1}{2^4},\cdots\cdots$

のように仕切りを入れて群数列として考えると

第 n 群には 2^{n-1} 個入っている

(1) $\dfrac{1}{2^n}$ は第 n 群の最初の数なので

$n \geqq 2$ のとき

$(1_{\text{コ}}+2_{\text{コ}}+2^2_{\text{コ}}+\cdots\cdots+2^{n-2}{}_{\text{コ}})+1_{\text{コ}}$

$=\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}$

これは $n=1$ のときも成り立つので　$\dfrac{1}{2^n}$ は **第 $\boldsymbol{2^{n-1}}$項**

(2) 第 1000 項が第何群の何番目かを考える

第 1000 項が第 n 群にあるとすると

$2^{n-1} \leqq 1000$　が成り立つ

これを満たす n を探すと

$n=10$ のとき $2^9=512$

$n=11$ のとき $2^{10}=1024$

$\therefore$ 第 1000 項は第 10 群にある

第 10 群の最初は第 512 項なので

第 1000 項は第 10 群の $1000-511=489$ 番目の数

分母は 2^{10} で，分子は $2k-1$ の 489 番目であるから

$2\cdot 489-1=977$

よって第 1000 項は $\boldsymbol{\dfrac{977}{2^{10}}}$

(3) 第 $n+2$ 群の和を求めればよい

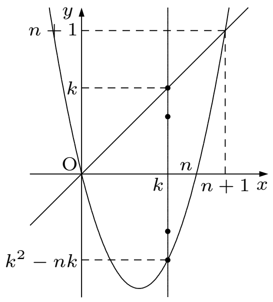
第 $n+2$ 群の最後の分子は $2k-1$ の 2^{n+1} コ目であるから

$\dfrac{1}{2^{n+2}}+\dfrac{3}{2^{n+2}}+\dfrac{5}{2^{n+2}}+\cdots\cdots+\dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}$

分子は初項 1, 末項 $2^{n+2}-1$, 項数 2^{n+1} コの等差の和

$=\dfrac{1}{2^{n+2}}\times\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n+1}\cdot(1+2^{n+2}-1)=\boldsymbol{2^n}$

18. (1) 交点を調べて図を書くと



$x=k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,\ n+1)$ 上にある

格子点の個数を a_k とすると

$a_k=k-(k^2-nk)+1 \qquad \longleftarrow +1$ を忘れるな !!

$=\boldsymbol{-k^2+(n+1)k+1}$**(個)** $\quad (k=0,1,2,\cdots,n,n+1)$

(2) 格子点の総和は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}a_k$ で求まるので

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}a_k=a_0+\sum_{k=1}^{n+1}a_k \qquad \longleftarrow k=1$ からに調整した

$\displaystyle=1+\sum_{k=1}^{n+1}\left\{-k^2+(n+1)k+1\right\}$

$\displaystyle=1-\sum_{k=1}^{n+1}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}k+\sum_{k=1}^{n+1}1$

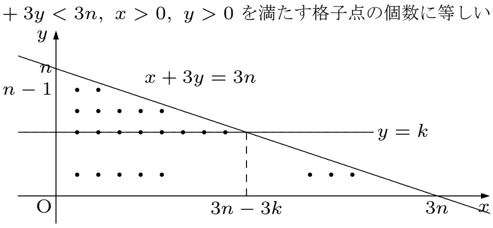
$=1-\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$\qquad\qquad +(n+1)\times\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)+(n+1)$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}(n+2)(n^2+n+6)}$**(個)**

19.(1) 求める自然数の組の個数は

$x+3y<3n,\ x>0,\ y>0$ を満たす格子点の個数に等しい



$y=k$ 上の格子点の個数を a_k とする

x 軸，y 軸，$x+3y=3n$ 上は含まないので

$x+3y=3n$ において $y=k$ のとき $x=3n-3k$ より

$a_k=3n-3k-1$(個) $\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,n-1)$

よって $n \geqq 2$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\sum_{k=1}^{n-1}(3n-3k-1)$

$\displaystyle=-3\sum_{k=1}^{n-1}k+(3n-1)\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=-3\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n+(3n-1)(n-1)$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(n-1)(3n-2)}$**(個)** これは $n=1$ のときも成り立つ

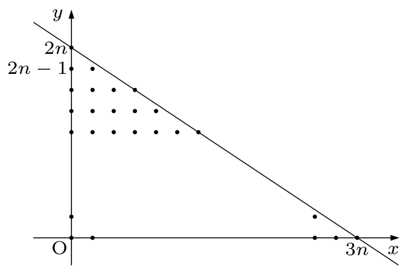
♡ 別解

$x+3y=3n$ の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ より格子点の個数を上から数えると

$2+5+8+\cdots\cdots+(3n-4) \qquad \longleftarrow$ 項数 $n-1$ 個の等差の和

$=\dfrac{1}{2}(n-1)(2+3n-4)=\dfrac{1}{2}(n-1)(3n-2)$(個)

(2) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 6n$



$y=2k$ と $y=2k-1$ のときで分けて考える

(i) $y=2k\ \ (k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ 上の格子点の数は

$2x+3y=6n$ に代入して $2x+6k=6n$

$x=3n-3k$ より $3n-3k+1$ 個

(ii) $y=2k-1\ (k=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ 上の格子点の数は

$2x+3(2k-1)=6n$ に代入して $x=3n-3k+1+\dfrac{1}{2}$

この x は格子点上ではないので

$x=3n-3k+1$ までと考えて $3n-3k+1+1$(個)

よって求める和は

$$\sum_{k=0}^{n}(3n-3k+1)+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+2)$$

$$=3n+1+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+2)$$

$$=3n+1+\sum_{k=1}^{n}(6n-6k+3)$$

$$=3n+1+6n^2-6\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$

$$=\underline{\underline{\boldsymbol{3n^2+3n+1}\textbf{(個)}}}$$

♡ 別解

$2x+3y=6n$ の傾きが $-\dfrac{2}{3}$ より格子点の個数を上から数えると

$1+2+4+5+7+8+\cdots\cdots+(3n-1)+(3n+1)$ なので

$=(1+4+7+\cdots\cdots+3n+1)+(2+5+8+\cdots\cdots+3n-1)$

それぞれ等差の和で，項数に注意して

$=\dfrac{1}{2}(n+1)(1+3n+1)+\dfrac{1}{2}n(2+3n-1)$

$=3n^2+3n+1$(個)

20.

(1) $a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n+2$ ♣等差型♣

初項 3 , 公差 2 の等差数列なので $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n=2n+1}}}$

(2) $a_1=-4,\quad a_{n+1}=3a_n$ ♣等比型♣

初項 -4, 公比 3 の等比数列なので $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n=-4\cdot3^{n-1}}}}$

(3) $a_1=0,\quad a_{n+1}-a_n=6n^2+2n$ ♣階差型♣

$\{a_n\}$ の階差数列が $6n^2+2n$ と読み取れるので

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2+2k)$$

$$=0+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=(n-1)n(2n-1+1)=2n^2(n-1)$$

この式は $a_1=0$ を満たすので $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n=2n^2(n-1)}}}$

(4) $a_1=1,\quad a_n=a_{n-1}+4^n\ \ (n\geqq 2)$ ♣階差型♣

n を $n+1$ に置き換えると $a_{n+1}=a_n+4^{n+1}\ \ (n\geqq 1)$

$a_{n+1}-a_n=4^{n+1}$ とすると $\{a_n\}$ の階差数列が 4^{n+1} より

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^{k+1}\quad\longleftarrow \text{初項 16 公比 4 項数 } n-1 \text{ 個}$$

$$=1+\frac{16(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$=\frac{16\cdot4^{n-1}-13}{3}=\frac{4^{n+1}-13}{3}$$

この式は $a_1=1$ を満たすので $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n=\dfrac{4^{n+1}-13}{3}}}}$

(5) ♣$a_{n+1}=pa_n+q$ 型♣ まずは解法を覚えること

$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n-4$

$$\begin{array}{rccccl} & a_{n+1} & = & 3a_n & -4 & \\ -) & \alpha & = & 3\alpha & -4 & \cdots\cdots① \\ \hline & a_{n+1}-\alpha & = & \multicolumn{2}{l}{3(a_n-\alpha)} & \end{array}$$

①より $\alpha=2$ なので

$a_{n+1}-2=3(a_n-2)\longleftarrow$ 目標の形　変形の仕方はいろいろ

この式から数列 $\{a_n-2\}$ が

公比 3 , 初項 $a_1-2=1-2=-1$ の等比数列と分かるので

$a_n-2=-1\cdot3^{n-1}$

$\therefore\ \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=-3^{n-1}+2}}}$

(6) ♣$a_{n+1}=pa_n+q$ 型♣

$a_1=5,\quad a_{n+1}+a_n=3$

$a_{n+1}=-a_n+3$

$$\begin{array}{rccccl} & a_{n+1} & = & -a_n & +3 & \\ -) & \alpha & = & -\alpha & +3 & \cdots\cdots① \\ \hline & a_{n+1}-\alpha & = & \multicolumn{2}{l}{-(a_n-\alpha)} & \end{array}$$

①より $\alpha=\dfrac{3}{2}$ なので

$a_{n+1}-\dfrac{3}{2}=-\left(a_n-\dfrac{3}{2}\right)\quad\longleftarrow$ 目標の形

この式から数列 $\left\{a_n-\dfrac{3}{2}\right\}$ が

公比 -1, 初項 $a_1-\dfrac{3}{2}=5-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$ の等比数列と分かるので

$a_n-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}(-1)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=\dfrac{7}{2}(-1)^{n-1}+\dfrac{3}{2}}}}$

21.

♣ 置き換え等をすることで基本パターンに帰着できる

(1) $a_1=2,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$　逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}\right)$

$b_{n+1}=b_n+3\quad\longleftarrow$ ♣等差型♣

数列 $\{b_n\}$ は公差 3 , 初項 $b_1=\dfrac{1}{2}$ の等差数列とわかるので

$b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot3=3n-\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{1}{a_n}=3n-\dfrac{5}{2}$ より　$a_n=\dfrac{1}{3n-\dfrac{5}{2}}=\underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{2}{6n-5}}}}$

(2) $a_1=1,\quad a_{n+1}=6a_n+2^n$

2^{n+1} で割ると ($n+1$ 乗で割るのがポイント)

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{6a_n}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=3\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}\quad\longleftarrow$ 置き換えができる形

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}\right)$

$b_{n+1}=3b_n+\dfrac{1}{2}\quad\longleftarrow$ ♣$a_{n+1}=pa_n+q$ 型♣

$b_{n+1}+\dfrac{1}{4}=3\left(b_n+\dfrac{1}{4}\right)$　と変形できるので

数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は公比 3 , 初項 $b_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ の等比数列

よって $b_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}\cdot3^{n-1}$

$b_n=\dfrac{1}{4}\cdot3^n-\dfrac{1}{4}$ より

$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{4}(3^n-1)\qquad\therefore\ \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=2^{n-2}(3^n-1)}}}$

$\left(a_n=\dfrac{6^n-2^n}{4}\text{ なども } OK\right)$

(3) $a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n-4n$

$a_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta=3(a_n-\alpha n-\beta)$ の等比型が目標

$$\left(\begin{array}{l}\text{この式を展開して整理すると}\\ a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta\\ \text{与式と係数比較して}\begin{cases}-2\alpha=-4\\ \alpha-2\beta=0\end{cases}\\ \text{よって}\alpha=2,\ \beta=1\end{array}\right)$$

$\therefore a_{n+1}-2(n+1)-1=3(a_n-2n-1)$ と変形すると

この式から数列 $\{a_n-2n-1\}$ が

公比 3, 初項 $a_1-2-1=-2$ の等比数列と分かるので

$a_n-2n-1=-2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=-2\cdot 3^{n-1}+2n+1}}}$

(4) $S_n=3a_n-2n$

まず $n=1$ を代入し a_1 を求める

$S_1=3a_1-2 \qquad S_1=a_1$ より

$a_1=3a_1-2 \qquad \therefore a_1=1$

次に $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ を利用すると

$\{3a_{n+1}-2(n+1)\}-\{3a_n-2n\}=a_{n+1}$

整理すると $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1$

$a_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}\left(a_n+2\right)$ と変形すると

この式から数列 $\{a_n+2\}$ が

公比 $\dfrac{3}{2}$, 初項 $a_1+2=1+2=3$ の等比数列と分かるので

$a_n+2=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2}}}$

(5) $a_1=1,\quad a_{n+1}=2{a_n}^2$

底を 2 とする両辺の対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2{a_n}^2$

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2+\log_2 {a_n}^2$

$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと $(b_1=\log_2 a_1=0)$

$b_{n+1}=2b_n+1$

$b_{n+1}+1=2\left(b_n+1\right)$ と変形できるので

数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2, 初項 $b_1+1=1$ の等比数列

よって $b_n+1=2^{n-1}$ より $\quad b_n=2^{n-1}-1$

$\therefore \log_2 a_n=2^{n-1}-1=\log_2 2^{2^{n-1}-1}$

よって $\underline{\underline{\boldsymbol{a_n=2^{2^{n-1}-1}}}}$

(6) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ ここに $a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$ を代入

$=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$ 以下同じように代入していく

$=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}a_{n-3}$

$=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\dfrac{n-4}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot a_1$

$=\underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{2}{n(n+1)}}}}$ $\longleftarrow$ いろいろ約分した

♡ 別解（置き換えを狙う）

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ より

$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n\ (n\geqq 1)$

この両辺に $(n+1)(n+2)$ をかけて

$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n$

$b_n=(n+1)na_n$ とおくと $(b_1=2\cdot 1\cdot a_1=2)$

$b_{n+1}=b_n$ より $\quad \{b_n\}$ は一定の数列で $b_1=2$ より

$b_n=2 \quad$ よって $(n+1)na_n=2 \quad \therefore a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

22.

(1) $a_1=1,\quad a_2=4,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ の形に変形する

$$\left(\begin{array}{l}\clubsuit\text{変形の方法}\clubsuit\\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\ \text{の}\\ \text{特性方程式 } x^2-5x+6=0\quad\text{を解くと}\\ (x-2)(x-3)=0\qquad x=2,\ 3\\ \text{これを}\alpha,\ \beta\text{に当てはめると変形完了}\end{array}\right)$$

(i) $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ と変形すると

数列 $\left\{a_{n+1}-2a_n\right\}$ が

公比 3, 初項 $a_2-2a_1=2$ の等比数列と分かるので

$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 3^{n-1}\cdots\cdots$①

(ii) $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ と変形すると

数列 $\left\{a_{n+1}-3a_n\right\}$ が

公比 2, 初項 $a_2-3a_1=1$ の等比数列と分かるので

$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}\cdots\cdots$②

①−② より $\quad \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}}}}$

(2) $a_1=0,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ の形に変形する

$$\left(\begin{array}{l}a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0\ \text{の}\\ \text{特性方程式 } x^2+3x-4=0\quad\text{を解くと}\\ (x+4)(x-1)=0\qquad x=1,\ -4\end{array}\right)$$

(i) $a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$ と変形すると

$\left\{a_{n+1}-a_n\right\}$ は公比 -4, 初項 $a_2-a_1=2$ の等比数列より

$a_{n+1}-a_n=2(-4)^{n-1}\cdots\cdots$①

(ii) $a_{n+2}+4a_{n+1}=(a_{n+1}+4a_n)$ と変形すると

$\left\{a_{n+1}+4a_n\right\}$ は一定の数列で初項 $a_2+4a_1=2$ より

(公比 1, 初項 2 の等比数列より)

$a_{n+1}+4a_n=2\cdots\cdots$②

②−① より $5a_n=2-2(-4)^{n-1}$

$\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{a_n=\dfrac{2-2(-4)^{n-1}}{5}}}}$

♡ 別解

①だけ, ② だけでも a_n は簡単に求められる

(3) $a_1=0,\quad a_2=1,\quad 9a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0$

$a_{n+2}-\dfrac{2}{3}a_{n+1}+\dfrac{1}{9}a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ の形に変形する

$$\left(\begin{array}{l}9x^2-6x+1=0\quad\text{を解くと}\\ (3x-1)^2=0\qquad x=\dfrac{1}{3}\\ \text{今回は}\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}\text{を代入}\end{array}\right)$$

$a_{n+2}-\dfrac{1}{3}a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n\right)$ と変形すると

数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n\right\}$ が

公比 $\dfrac{1}{3}$, 初項 $a_2-\dfrac{1}{3}a_1=1$ の等比数列と分かるので

$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\longleftarrow$ この式から a_nを求める

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\longleftarrow$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$で割るタイプ

両辺を $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ で割ると $(3^{n+1}$を掛けても同じ)

$3^{n+1}a_{n+1}=3^na_n+9$

$b_n=3^na_n$ とおくと $\left(b_1=3^1a_1=0\right)$

$b_{n+1}=b_n+9$ $\longleftarrow$ ♣等差型♣

よって数列 $\left\{b_n\right\}$ は公差 9, 初項 $b_1=0$ の等差数列

$b_n=0+(n-1)\cdot 9=9(n-1)$

$3^na_n=9(n-1)$ より $a_n=\dfrac{9(n-1)}{3^n}=\underline{\underline{\boldsymbol{\dfrac{n-1}{3^{n-2}}}}}$

(4) $a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}-2a_{n+1}-2a_n=0\cdots\cdots①$

($x^2-2x-2=0$ を解くと $x=1\pm\sqrt{3}$)

$\alpha=1+\sqrt{3},\ \beta=1-\sqrt{3}$ とすると ① は $\alpha,\ \beta$ を用いて

(i) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できるので

$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $4-\alpha$, 公比 β の等比数列より

$a_{n+1}-\alpha a_n=(4-\alpha)\beta^{n-1}\cdots\cdots②$

(ii) $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形できるので

$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は初項 $4-\beta$, 公比 α の等比数列より

$a_{n+1}-\beta a_n=(4-\beta)\alpha^{n-1}\cdots\cdots③$

③ − ② より

$(\alpha-\beta)a_n=(4-\beta)\alpha^{n-1}-(4-\alpha)\beta^{n-1}$

ここに $\alpha,\ \beta$ を代入すると

$2\sqrt{3}a_n=(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{n-1}-(3-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^{n-1}$

$2\sqrt{3}a_n=\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})^{n-1}-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})^{n-1}$

$$\boldsymbol{a_n=\frac{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}{2}}$$

23. $\begin{cases}a_1=1\\ b_1=1\end{cases}$, $\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots\cdots①\\ b_{n+1}=-2a_n+9b_n & \cdots\cdots②\end{cases}$

(1) ♣ $2a_{n+1}-b_{n+1}$ を $2a_n-b_n$ で表す

$2a_{n+1}-b_{n+1}=2(2a_n+3b_n)-(-2a_n+9b_n)$

$=3(2a_n-b_n)$ ⟵ うまく等比になる

数列 $\{2a_n-b_n\}$ が公比 3, 初項 $2a_1-b_1=1$ の等比数列より

$\boldsymbol{2a_n-b_n=3^{n-1}}\cdots\cdots③$

♣ $a_{n+1}-3b_{n+1}$ を a_n-3b_n で表す

$a_{n+1}-3b_{n+1}=2a_n+3b_n-3(-2a_n+9b_n)$

$=8(a_n-3b_n)$ ⟵ うまく等比になる

数列 $\{a_n-3b_n\}$ が公比 8, 初項 $a_1-3b_1=-2$ の等比数列より

$\boldsymbol{a_n-3b_n=-2\cdot 8^{n-1}}\cdots\cdots④$

(2) ③ × 3 − ④ より b_n を消去すると

$5a_n=3\cdot 3^{n-1}+2\cdot 8^{n-1}$ $\quad\therefore \boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+2\cdot 8^{n-1}}{5}}$

③ − ④ × 2 より a_n を消去すると

$5b_n=3^{n-1}+4\cdot 8^{n-1}$ $\quad\therefore \boldsymbol{b_n=\dfrac{3^{n-1}+4\cdot 8^{n-1}}{5}}$

♡別解 (♣ 誘導がないときはどうするの)

(方法 1) 適当に ①+② や ①−② をやってみる

易しい問題だとこれで等比の形になってくれる

(方法 2) 3 項間の漸化式をつくる

①より $\qquad b_n=\dfrac{1}{3}a_{n+1}-\dfrac{2}{3}a_n$ と

この式の次数を上げた $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_{n+2}-\dfrac{2}{3}a_{n+1}$ の

2 つを②に代入して

$\dfrac{1}{3}a_{n+2}-\dfrac{2}{3}a_{n+1}=-2a_n+9\left(\dfrac{1}{3}a_{n+1}-\dfrac{2}{3}a_n\right)$

$a_{n+2}-11a_{n+1}+24a_n=0$ ⟵ 3 項間漸化式

$a_1=1$, ①より $a_2=2a_1+3b_1=5$

これを解いて a_n を求める

(方法 3) 自分で等比の形をつくる

$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ とおく ⟵ 目標

①, ②を代入して

$2a_n+3b_n-\alpha(-2a_n+9b_n)=\beta(a_n-\alpha b_n)$

$(2+2\alpha)a_n+(3-9\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

係数比較して $2+2\alpha=\beta,\ \ 3-9\alpha=-\alpha\beta$

これを解いて $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1}{2},3\right)$, $(3,\ 8)$ を代入すると

(i) $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_{n+1}=3\left(a_n-\dfrac{1}{2}b_n\right)$ より

$a_n-\dfrac{1}{2}b_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$ (上の③) と

(ii) $a_{n+1}-3b_{n+1}=8(a_n-3b_n)$ より

$a_n-3b_n=-2\cdot 8^{n-1}$ (上の④) が得られる

24. (1) $a_1=3,\quad a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3}{a_n}}$

底を 3 とする両辺の対数をとると

$\log_3 a_{n+1}=\log_3\sqrt{\dfrac{3}{a_n}}$

$\log_3 a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{3}{a_n}$

$\log_3 a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\log_3 a_n)$

$b_n=\log_3 a_n$ とおくと $(b_1=\log_3 a_1=1)$

$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$ と変形すると

$\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ 初項 $b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$b_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$b_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

$\log_3 a_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}=\log_3 3^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}}$

$\therefore\ \boldsymbol{a_n=3^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}}}$

(2) $a_1=1,\quad na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

両辺を $n(n+1)$ で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{a_1}{1}=1\right)$

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$ ⟵ ♣階差型♣

この式から $\{b_n\}$ の階差数列が $\dfrac{1}{n(n+1)}$ と分かるので

$n\geqq 2$ のとき

$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$

ここで

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n}$

よって $b_n=b_1+1-\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{1}{n}$(これは $b_1=1$ を満たす)

$\therefore\ \dfrac{a_n}{n}=2-\dfrac{1}{n}\qquad \boldsymbol{a_n=2n-1}$

(3) $a_1=1,\quad (2n+3)(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)^2a_n$

両辺を $(2n-1)(2n+1)$ で割ると

$\dfrac{2n+3}{2n+1}a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$

$b_n=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{3}{1}a_1=3\right)$

$b_{n+1}=b_n$ より $\{b_n\}$ は一定の数列で初項 $b_1=3$ より

$b_n=3$ よって $\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n=3$ $\quad\therefore \boldsymbol{a_n=\dfrac{3(2n-1)}{2n+1}}$

♡ 別解

$a_{n+1}=\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+3)(2n-1)}a_n$ より

$a_n=\dfrac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}a_{n-1}$

$=\dfrac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}\cdot\dfrac{(2n-3)^2}{(2n-1)(2n-5)}a_{n-2}$

$=\dfrac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}\cdot\dfrac{(2n-3)^2}{(2n-1)(2n-5)}\cdots\dfrac{5^2}{7\cdot 3}\cdot\dfrac{3^2}{5\cdot 1}a_1$

$=\dfrac{3(2n-1)}{2n+1}a_1=\dfrac{3(2n-1)}{2n+1}$ (いろいろ約分された)

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2}$

$b_n = \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1}$ とおくと $\left(b_1 = \dfrac{a_1 - 4}{a_1 - 1} = -\dfrac{1}{2}\right)$

（b_{n+1}と b_n の関係式を作る）

$b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - 4}{a_{n+1} - 1}$

$= \dfrac{\dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2} - 4}{\dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2} - 1} = \dfrac{-a_n + 4}{2a_n - 2} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1}$

$\therefore b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\ b_n$

よって $\{b_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$, 初項 $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$b_n = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$b_n = \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1}$ を変形すると $a_n = \dfrac{b_n - 4}{b_n - 1}$ が得られるので

$a_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \boldsymbol{\dfrac{1 - (-2)^{n+2}}{1 - (-2)^n}}$

♡ 別解（誘導がないときは自分で等比の形をつくる）

$b_n = \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ とおくと（これが等比になって欲しい）

$b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \dfrac{\dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2} - \beta}{\dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2} - \alpha}$

$= \dfrac{3a_n - 4 - \beta a_n + 2\beta}{3a_n - 4 - \alpha a_n + 2\alpha} = \dfrac{(3 - \beta)a_n + 2\beta - 4}{(3 - \alpha)a_n + 2\alpha - 4}$

$= \dfrac{3 - \beta}{3 - \alpha} \cdot \dfrac{a_n + \dfrac{2\beta - 4}{3 - \beta}}{a_n + \dfrac{2\alpha - 4}{3 - \alpha}} \cdots\cdots ①$

$b_{n+1} = kb_n$ となるとき等比数列になるので

$= k \cdot \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ 　これと①を比較して

$\dfrac{3 - \beta}{3 - \alpha} = k, \quad \dfrac{2\beta - 4}{3 - \beta} = -\beta, \quad \dfrac{2\alpha - 4}{3 - \alpha} = -\alpha$

これを解いて $\alpha = 1,\ 4, \quad \beta = 1,\ 4$ より

$\alpha = 1,\ \beta = 4,\ k = -\dfrac{1}{2}$ などが得られる（以下略）

(5) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots\cdots + na_n = 2na_n + n^2$

$n = 1$ のとき $a_1 = 2a_1 + 1^2$ より $a_1 = -1$

$b_n = na_n$ とおくと $(b_1 = 1a_1 = -1)$

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_n = 2b_n + n^2 \cdots\cdots ①$

この式の n を $n + 1$ にした式を用意すると

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_n + b_{n+1} = 2b_{n+1} + (n+1)^2 \cdots\cdots ②$

② − ① より　♣ $S_{n+1} - S_n$ のイメージ

$b_{n+1} = 2b_{n+1} - 2b_n + (n+1)^2 - n^2$

$b_{n+1} = 2b_n - 2n - 1 \cdots\cdots ③$

$b_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = 2(b_n - \alpha n - \beta)$ とおく

展開して ③ と係数比較をすると $\alpha = 2,\ \beta = 3$ より

$b_{n+1} - 2(n+1) - 3 = 2\,(b_n - 2n - 3)$ と変形すると

$\{b_n - 2n - 3\}$ は公比 2 初項 -6 の等比数列より

$b_n - 2n - 3 = -6 \cdot 2^{n-1}$

$b_n = -3 \cdot 2^n + 2n + 3$

$na_n = -3 \cdot 2^n + 2n + 3$

$\therefore a_n = \boldsymbol{\dfrac{-3 \cdot 2^n + 2n + 3}{n}}$

25. (1) $(1 + \sqrt{2})^1 = 1 + \sqrt{2}$ より $\boldsymbol{a_1 = 1,\ b_1 = 1}$

$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ より $\boldsymbol{a_2 = 3,\ b_2 = 2}$

(2) $(1 + \sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$

$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より

$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n(1 + \sqrt{2})$

$= (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

$= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$

a_n, b_n は自然数 (有理数) であるから

$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = a_n + b_n}$

(3) $a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}$ と $a_n - b_n\sqrt{2}$ の関係式を作る

$a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}$

$= a_n + 2b_n - (a_n + b_n)\sqrt{2}$

$= a_n - b_n\sqrt{2} + 2b_n - a_n\sqrt{2}$ 　$\longleftarrow a_n - b_n\sqrt{2}$を意識

$= a_n - b_n\sqrt{2} - \sqrt{2}(a_n - b_n\sqrt{2})$

$= (1 - \sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2})$ であるから

$\{a_n - b_n\sqrt{2}\}$ は初項 $1 - \sqrt{2}$ 公比 $1 - \sqrt{2}$ の等比数列より

$\boldsymbol{a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n}$

(4) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n \cdots\cdots ①$

$a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n \cdots\cdots ②$

① + ② より　$2a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}}$

① − ② より　$2\sqrt{2}b_n = (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n$

$\therefore \boldsymbol{b_n = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}$

26. (1) $p_1 = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

2 日後にご機嫌である確率 p_2

今日	1 日後	2 日後	
ご機嫌	ご機嫌	ご機嫌	$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$
ご機嫌	不機嫌	ご機嫌	$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

よって $p_2 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{11}{18}}$

3 日後にご機嫌である確率 p_3

♣ p_3 は 2 日後と 3 日後だけでも求められ

この見方が (2) の漸化式の作り方のヒントになる !!

2 日後	3 日後	
ご機嫌	ご機嫌	$p_2 \times \dfrac{2}{3}$
不機嫌	ご機嫌	$(1 - p_2) \times \dfrac{1}{2}$

よって $p_3 = p_2 \times \dfrac{2}{3} + (1 - p_2) \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{11}{18} \cdot \dfrac{2}{3} + \left(1 - \dfrac{11}{18}\right) \cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{65}{108}}$

(2) n 日後にご機嫌である確率 p_n

n 日後	$n + 1$ 日後	
ご機嫌	ご機嫌	$p_n \times \dfrac{2}{3}$
不機嫌	ご機嫌	$(1 - p_n) \times \dfrac{1}{2}$

よって $p_{n+1} = p_n \times \dfrac{2}{3} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{2}$ より

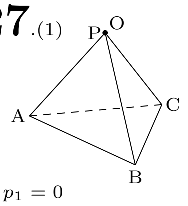
$\boldsymbol{p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{2}}$

(3) $p_{n+1} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{6}\left(p_n - \dfrac{3}{5}\right)$ 　と変形すると

数列 $\left\{p_n - \dfrac{3}{5}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{6}$, 初項 $p_1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{15}$ の等比数列

$p_n - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{15} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$ 　$\therefore \boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{15}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{3}{5}}$

27. (1)



$p_1 = 0$

p_n と p_{n+1} の関係式をつくる

n 秒後		$n+1$ 秒後	
O に有	$\longrightarrow$	O に有	$p_n \times 0$
O に無	$\longrightarrow$	O に有	$(1-p_n)\times \frac{1}{3}$

よって $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n) = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$

$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$ と変形すると

$\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$, 初項 $p_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ の等比数列

$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \boldsymbol{p_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}}$$

(2) p_1 は

1 回目

$A \underset{白}{\overset{白}{\rightleftarrows}} B \qquad p_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{3}{4}$

p_n と p_{n+1} の関係式をつくる

(i) n 回後に赤玉が A にあるとき

$n+1$ 回目

$A \underset{白}{\overset{白}{\rightleftarrows}} B \qquad p_n \times \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{3}{4}p_n$

(ii) n 回後に赤玉が A にないとき

$n+1$ 回目

$A \underset{赤}{\overset{白}{\rightleftarrows}} B \qquad (1-p_n)\times\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1-p_n)$

(i)(ii) より $p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{5}{12}p_n + \frac{1}{3}$

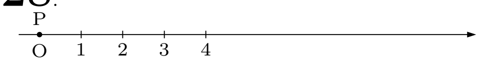
$p_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{5}{12}\left(p_n - \frac{4}{7}\right)$ と変形できるので

$\left\{p_n - \frac{4}{7}\right\}$ は等比数列で公比 $\frac{5}{12}$, 初項 $p_1 - \frac{4}{7} = \frac{5}{28}$

$p_n - \frac{4}{7} = \frac{5}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$

$$\therefore \boldsymbol{p_n = \frac{5}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}}$$

28.



(1) $\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{2}}$

p_2 : 座標 2 には, 座標 0 と座標 1 からくる

$0 \longrightarrow 2$ のとき $\frac{1}{2}$

$1 \longrightarrow 2$ のとき $p_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$

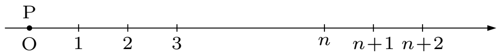
p_3 : 座標 3 には, 座標 1 と座標 2 からくる

$1 \longrightarrow 3$ のとき $p_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$2 \longrightarrow 3$ のとき $p_2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\therefore p_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$

(2) 座標 $n+2$ には, 座標 n と座標 $n+1$ からくる



$n \longrightarrow n+2$ のとき $p_n \times \frac{1}{2}$

$n+1 \longrightarrow n+2$ のとき $p_{n+1} \times \frac{1}{2}$

$$\therefore \boldsymbol{p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n+1}}$$

(3) $p_{n+2} - \frac{1}{2}p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = 0$

$\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ を解いて} \quad x = -\frac{1}{2},\ 1 \right)$

(i) $p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$ と変形すると

数列 $\left\{p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n\right\}$ は一定で, 初項 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$ より

$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = 1 \cdots\cdots$ ①

(ii) $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$ と変形すると

数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ が

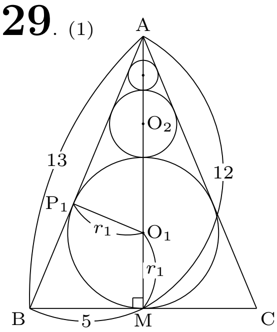
公比 $-\frac{1}{2}$ 初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$ の等比数列と分かるので

$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots\cdots$ ②

① − ② より

$\frac{3}{2}p_n = 1 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad \therefore \boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}$

29. (1)



図より

$\triangle AO_1P_1 \backsim \triangle ABM$

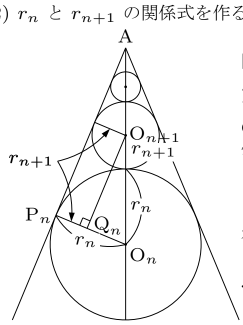
なので

$AO_1 : AB = O_1P_1 : BM$

$12 - r_1 : 13 = r_1 : 5$

これより $\boldsymbol{r_1 = \frac{10}{3}}$

(2) r_n と r_{n+1} の関係式を作る



図より

$\triangle O_{n+1}O_nQ_n \backsim \triangle ABM$

であるから

$O_{n+1}O_n : AB = O_nQ_n : BM$

$r_{n+1} + r_n : 13 = r_n - r_{n+1} : 5$

これより $r_{n+1} = \frac{4}{9}\ r_n$

よって数列 $\{r_n\}$ は

初項 $r_1 = \frac{10}{3}$, 公比 $\frac{4}{9}$ の等比数列

$$\therefore \boldsymbol{r_n = \frac{10}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}$$

(3) $S_n = \pi {r_n}^2 = \pi\left\{\frac{10}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}^2 = \frac{100}{9}\pi\left(\frac{16}{81}\right)^{n-1}$

よって $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_n$ は

初項 $\frac{100}{9}\pi$, 公比 $\frac{16}{81}$, 項数 n 個の等比数列の和なので

$$\frac{100}{9}\pi\cdot\frac{1-\left(\frac{16}{81}\right)^n}{1-\frac{16}{81}} = \boldsymbol{\frac{180}{13}\left\{1 - \left(\frac{16}{81}\right)^n\right\}\pi}$$

30. (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots(*)$

数学的帰納法で証明する

(I) $n=1$ のとき

左辺 $=1^2=1$ 　右辺 $=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$

よって $n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ

(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する

すなわち $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

と仮定する

この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つことを示す。
すなわち
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
を示す。

$n=k+1$ のとき

(左辺)

$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$

仮定を代入して

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\dfrac{6}{6}(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)\Big\{k(2k+1)+6(k+1)\Big\}$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

よって $n=k$ のとき $(*)$ が成り立てば

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ

(I)(II) よりすべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ

(2) $n!>2^{n-1}$ 　$(n\geqq3)\cdots\cdots(*)$

数学的帰納法で証明する

(I) $n=3$ のとき

左辺 $=3!=6$

右辺 $=2^2=4$

よって $n=3$ のとき $(*)$ は成り立つ

(II) $n=k$ $(k\geqq3)$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する

すなわち $k!>2^{k-1}$ と仮定する

この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つことを示す
すなわち
$(k+1)!>2^k$を示すので
$(k+1)!-2^k>0$ を示せばよい

$n=k+1$ のとき

$(k+1)!-2^k$

$=(k+1)\cdot k!-2^k$

仮定より $k!$を 2^{k-1} に置き換えると

$(k+1)\cdot k!-2^k>(k+1)2^{k-1}-2^k$

$=(k+1)2^{k-1}-2\cdot2^{k-1}$

$=(k-1)2^{k-1}>0$ 　$(k\geqq3$ より)

よって $(k+1)!>2^k$ であるから

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ

(I)(II) より自然数 n $(n\geqq3)$ について $(*)$ は成り立つ

(3) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leqq\dfrac{2n-1}{n}\cdots\cdots(*)$

数学的帰納法で証明する

(I) $n=1$ のとき

左辺 $=1$ 　右辺 $=\dfrac{2-1}{1}=1$

よって $n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ

(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}\leqq\dfrac{2k-1}{k}$

このとき
$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqq\dfrac{2k+1}{k+1}$
を示す

$n=k+1$ のとき

(右辺)−(左辺)

$=\dfrac{2k+1}{k+1}-\left\{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$=\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{1}{(k+1)^2}-\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}\right)$

仮定より

$-\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}\right)\geqq-\dfrac{2k-1}{k}$ なので

$\geqq\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{1}{(k+1)^2}-\dfrac{2k-1}{k}$

$=\dfrac{1}{k(k+1)^2}>0$

よって $n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ

(I)(II) よりすべての自然数について $(*)$ は成り立つ

31. (1) (I) $n=1$ のとき $4^1-1=3$

よって $n=1$ のとき 4^n-1 は3で割り切れる

(II) $n=k$ のとき 4^n-1 が3で割り切れると仮定する

すなわち $4^k-1=3m$ (m は自然数) と仮定する

この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも3で割り切れることを示す。
すなわち $4^{k+1}-1$ が3で割り切れることを示す

$n=k+1$ のとき

$4^{k+1}-1$

$=4\cdot4^k-1$ 　　仮定より $4^k=3m+1$ を代入

$=4(3m+1)-1$

$=3(4m+1)$

$4m+1$ は自然数より $3(4m+1)$ は3で割り切れる

よって $n=k+1$ のときも 4^n-1 は3で割り切れる

(I)(II) よりすべての自然数 n について 4^n-1 は3で割り切れる

(2) (I) $n=1$ のとき $2^2+3^1=7$ 　$\therefore$ 7 の倍数

(II) $n=k$ のとき 7 の倍数と仮定すると

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7m$ (m は自然数) とおける

この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも 7 の倍数であることを示す。
すなわち $2^{k+2}+3^{2k+1}$が 7 の倍数であることを示す

$n=k+1$ のとき

$2^{k+2}+3^{2k+1}$

$=2\cdot2^{k+1}+3^{2k+1}$

仮定より $2^{k+1}=7m-3^{2k-1}$ を代入して

$=2(7m-3^{2k-1})+3^{2k+1}$

$=14m-2\cdot3^{2k-1}+9\cdot3^{2k-1}$

$=14m+7\cdot3^{2k-1}$

$=7(2m+3^{2k-1})$

$2m+3^{2k-1}$ は自然数より $7(2m+3^{2k-1})$ は 7 の倍数である

よって $n=k+1$ のときも 7 の倍数である

(I)(II) よりすべての自然数 n について

$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 の倍数である

32.(1) $a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{n}{a_n+n}\cdots\cdots①$

$a_2=\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$

$a_3=\frac{2}{a_2+2}=\frac{2}{\frac{2}{3}+2}=\frac{3}{4}$

よって $a_n=\frac{n}{n+1}$ と推定できる

$a_n=\frac{n}{n+1}\cdots\cdots②$ を数学的帰納法で証明する

(I) $n=1$ のとき ② は $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

よって $a_1=\frac{1}{2}$ を満たす

(II) $n=k$ のとき ② が成り立つと仮定する

すなわち $a_k=\frac{k}{k+1}$ と仮定する

(この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも②が成り立つことを示す。
すなわち $a_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ を示す。

① に $n=k$ を代入すると　(② を示すので ② は使えない)

$a_{k+1}=\frac{k}{a_k+k}$　$\longleftarrow$ この式に仮定を代入する

$=\frac{k}{\frac{k}{k+1}+k}=\frac{k(k+1)}{k+k(k+1)}=\frac{k(k+1)}{k(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

よって $n=k+1$ のときも ② は成り立つ

(I)(II) よりすべての自然数について $a_n=\frac{n}{n+1}$ である

(2) $a_1=1,\quad na_{n+1}a_n+(n+2)a_{n+1}-na_n=0$

$(na_n+n+2)a_{n+1}=na_n$

$a_{n+1}=\frac{na_n}{na_n+n+2}\cdots\cdots①$ であるから

$a_2=\frac{1a_1}{1a_1+1+2}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$

$a_3=\frac{2a_2}{2a_2+2+2}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}+4}=\frac{1}{9}$

よって $a_n=\frac{1}{n^2}$ と推定できる

$a_n=\frac{1}{n^2}\cdots\cdots②$ を数学的帰納法で証明する

(I) $n=1$ のとき ② は $a_1=\frac{1}{1^2}=1$

よって $a_1=1$ を満たす

(II) $n=k$ のとき ② が成り立つと仮定する

すなわち $a_k=\frac{1}{k^2}$ と仮定する

(この仮定を利用して
$n=k+1$ のときも②が成り立つことを示す。
すなわち $a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)^2}$ を示す。

① に $n=k$ を代入すると　(② を示すので ② は使えない)

$a_{k+1}=\frac{ka_k}{ka_k+k+2}$　$\longleftarrow$ この式に仮定を代入する

$=\frac{k\cdot\frac{1}{k^2}}{k\cdot\frac{1}{k^2}+k+2}=\frac{1}{1+k^2+2k}=\frac{1}{(k+1)^2}$

よって $n=k+1$ のときも ② は成り立つ

(I)(II) よりすべての自然数について $a_n=\frac{1}{n^2}$ である

♣ 補足
厳密には ① の形にするときに
分母 $na_n+n+2\neq 0$ を断るべきである

33. $x^2-3x+1=0$
解と係数の関係より $\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$
$\alpha^n+\beta^n$ が整数であることを数学的帰納法で示す
(I) $n=1$ のとき $\alpha+\beta=3$ より整数
$n=2$ のとき　$\longleftarrow$ これをやる理由は (II) にある

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2=7$ より整数

よって $n=1,2$ のとき $\alpha^n+\beta^n$ は整数である

(II) $n=k,\ k+1$ のとき
$\alpha^k+\beta^k,\quad \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ が整数であると仮定する
このとき

$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$
$=\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)(\alpha+\beta)-\alpha^{k+1}\beta-\alpha\beta^{k+1}$
$=3\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^k+\beta^k\right)$
$=3\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)-\left(\alpha^k+\beta^k\right)$

仮定より $\alpha^k+\beta^k,\quad \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ は整数であるから
$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ は整数である
よって $n=k+2$ のときも成り立つ
(I)(II) よりすべての自然数 n について $\alpha^n+\beta^n$ は整数である

34. ♣ 求める積の総和は
$1\cdot2,\ 1\cdot3,\ \cdots\cdots,1\cdot n,\ 2\cdot3,\ 2\cdot4,\ \cdots\cdots,2\cdot n,$
$3\cdot4,\cdots\cdots,3\cdot n,\ \cdots\cdots,(n-1)n$　というやつの和
求める積の総和を S とすると S は
$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$　を展開すると登場して
$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=2S+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$ が成立
(例えば $1\cdot2$ は $1\cdot2$ と $2\cdot1$ で 2 回登場する)
よって

$\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=2S+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$2S=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$S=\frac{1}{8}n^2(n+1)^2-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$

35. (1) $\sum_{k=1}^{15}[\sqrt{k}]$
$=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+[\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]+[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]+[\sqrt{8}]$
$+[\sqrt{9}]+[\sqrt{10}]+[\sqrt{11}]+[\sqrt{12}]+[\sqrt{13}]+[\sqrt{14}]+[\sqrt{15}]$
$=1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3$
$=1\times3+2\times5+3\times7=\boldsymbol{34}$

(2) $[\sqrt{k}]=m$ (m は整数) となる k は
$m\leqq\sqrt{k}<m+1$ より $m^2\leqq k<m^2+2m+1$ のとき
すなわち $k=m^2,\ m^2+1,\ m^2+2,\cdots,m^2+2m$ のとき
よって k の個数は
$m^2+2m-m^2+1=$ **$2m+1$ 個**

(3) (2) より $[\sqrt{k}]=m$ となるものが $2m+1$ 個
また $k=n^2$のときが $[\sqrt{n^2}]=n$ より
$k=n^2-1$ のときは $[\sqrt{k}]=n-1$ となる最後

$\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]$
$=(1+1+1)+(2+2+2+2+2)+\cdots\cdots$
$+(m+m+\cdots+m)+\cdots\cdots$　$\longleftarrow$ m が $2m+1$ 個
$+\{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)\}$
$=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+m(2m+1)+\cdots+(n-1)(2n-1)$
$=\sum_{m=1}^{n-1}m(2m+1)=\sum_{m=1}^{n-1}(2m^2+m)$
$=2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$
$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)}$