§7　数列 ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇

⋆⋆ 等差数列・等比数列 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

1. 第 3 項が -12，第 10 項が 37 である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項を求めよ。　　(2) 100 は第何項か。

(3) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。　　(4) 第 10 項から第 20 項までの和を求めよ。

2. (1) 第 5 項が 5，初項から第 5 項までの和が 5 である等差数列の一般項を求めよ。

(2) 等差数列の和 $41+37+33+\cdots\cdots+(-35)$ を求めよ。

(3) 一般項が $a_n=-3n+57$ で表される等差数列は，初項から第何項までの和が最大になるか。また，その最大値を求めよ。

3. 次の数の総和を求めよ。

(1) 1 から 300 までの自然数のうち，3 または 5 で割り切れる数。

(2) 100 から 200 までの自然数のうち，7 で割って 3 余る数。

(3)♠ 15 を分母とする既約分数のうち，20 未満である正の数。

4$^\sharp$ (1) $a_n=6n-1$，$b_n=8n-1$ で表される 2 つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項のうち，500 以下である数の総和を求めよ。

(2) $a_1=3$，$a_5=2$ である数列 $\{a_n\}$ について，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ が等差数列になるとき a_n を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が等差数列のとき，数列 $\{a_{3n}\}$ も等差数列であることを示せ。

5. 第 3 項が 12，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ について，

(1) 一般項 a_n を求めよ。　　(2) 1536 は第何項か。

(3) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。　　(4) $S_n>2000$ を満たす最小の n を求めよ。

6. (1) 数列 a，b，12 が等差数列になり，数列 4，a，b が等比数列になるとき，実数 a, b の値を求めよ。

(2)$^\sharp$ 等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までの和が 2 で，第 6 項から第 10 項までの和が 6 であるとき，第 11 項から第 15 項までの和を求めよ。

(3)$^\sharp$ 初項 2, 公比 4 である等比数列の初項から第 n 項までの積を求めよ。

⋆⋆ いろいろな数列と和 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

7. 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot3^{k}$　　(5)$^\sharp$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{3k}+2^{2k-1}-2}{3^{k+1}}$　　(6)$^\sharp$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}|3n-50|$

8. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1\cdot 2\cdot 3,\ \ 2\cdot 3\cdot 5,\ \ 3\cdot 4\cdot 7,\ \ 4\cdot 5\cdot 9,\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ \ 1+2,\ \ 1+2+4,\ \ 1+2+4+8, \cdots\cdots$

(3)$^\sharp$ $1^2,\ \ 1^2+3^2,\ \ 1^2+3^2+5^2,\ \ 1^2+3^2+5^2+7^2, \cdots\cdots$

(4)$^\sharp$ $1^2\cdot n,\ \ 2^2\cdot(n-1),\ \ 3^2\cdot(n-2),\ \ 4^2\cdot(n-3), \cdots\cdots,\ \ n^2\cdot 1$

9. 次の数列の一般項を求めよ。また，(2) は初項から第 n 項までの和も求めよ。

(1) $2,\ \ 5,\ \ 12,\ \ 23,\ \ 38,\ \cdots\cdots$ (2) $3,\ \ 33,\ \ 333,\ \ 3333,\ \cdots\cdots$

(3) $1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 10,\ \ 23,\ \ 46,\ \cdots\cdots$

10. 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - n + 1$ (2) $S_n = 2^n - 1$

11. 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (2)$^\sharp$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}$

(3)$^\sharp$ $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ (4)$^\spadesuit$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(5)$^\spadesuit$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ (6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

12. 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 5^{k-1}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^{k-1}$ (3)$^\sharp$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$

(4)$^\sharp$ $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$

13. $a_n = 3n+1,\ b_n = 3\cdot 2^{n-1}$ とするとき，次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$ (2) $b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+\cdots\cdots+b_nb_{n+1}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

14$^\spadesuit$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を $S_n=(n+1)^2$ とするとき，次を求めよ。

(1) 一般項 a_n (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_ka_{k+1}}$ $(n \geqq 2)$ (3) $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ $(n \geqq 2)$

⋆⋆ 群数列，格子点 ⋆⋆ ⋆⋆⋆

15. 奇数の数列を，次のように第 n 群に n 個となるような群に分ける。

$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$

(1) 第 10 群の 3 番目の数を求めよ。 (2) 第 n 群の最後の数を求めよ。

(3) 第 n 群の最初の数を求めよ。 (4) 777 は第何群の何番目の数か。

(5) 第 n 群にある数の総和を求めよ。 (6) 第 1 群から第 n 群にある数の総和を求めよ。

16$^\sharp$ 数列 $\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$
について，
(1) $\frac{10}{10}$ は第何項か。　(2) 第 200 項を求めよ。　(3) 初項から第 200 項までの和を求めよ。

17$^\spadesuit$ 数列 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\cdots\cdots,\ \frac{15}{2^4},\ \frac{1}{2^5},\cdots\cdots$ について
(1) $\frac{1}{2^n}$ は第何項か。　(2) 第 1000 項を求めよ。　(3) 分母が 2^{n+2} である数の和を求めよ。

18$^\spadesuit$ 座標平面上で $y \leqq x,\ \ y \geqq x^2 - nx$　(n は自然数) を満たす領域 D に含まれる，次の格子点（x 座標，y 座標がいずれも整数である点）の個数を求めよ。
(1) $x = k$　$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots, n,\ n+1)$ 上にある格子点の個数。
(2) D に含まれる格子点の個数。

19. (1)$^\spadesuit$ $x + 3y < 3n$ (n は自然数) を満たす自然数 (x, y) の組はいくつあるか。
(2)$^\diamondsuit$ $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x + 3y \leqq 6n$ (n は自然数) を満たす領域に含まれる格子点の個数を求めよ。

$\star^\star$ 漸化式 $\star^\star\star^\star\star^\star$

20. 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 2$　(2) $a_1 = -4,\quad a_{n+1} = 3a_n$
(3) $a_1 = 0,\quad a_{n+1} - a_n = 6n^2 + 2n$　(4) $a_1 = 1,\quad a_n = a_{n-1} + 4^n\ (\,n \geqq 2\,)$
(5) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n - 4$　(6) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} + a_n = 3$

21. 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし S_n は数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和とする。
(1)$^\sharp$ $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$　(2)$^\sharp$ $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 6a_n + 2^n$
(3)$^\sharp$ $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n - 4n$　(4)$^\sharp$ $S_n = 3a_n - 2n$
(5)$^\spadesuit$ $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2{a_n}^2$　(6)$^\spadesuit$ $a_1 = 1,\quad a_n = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}\ (\,n \geqq 2\,)$

22. 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1)$^\sharp$ $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$　(2)$^\sharp$ $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$
(3)$^\spadesuit$ $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ 9a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$　(4)$^\diamondsuit$ $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n = 0$

23$^\spadesuit$ 2 つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ が $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases},\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = -2a_n + 9b_n \end{cases}$ で定義されているとき
(1) 数列 $\{2a_n - b_n\},\ \ \{a_n - 3b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。
(2) 数列 $\{a_n\},\ \ \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

24♠ 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし [ ] 内の数列 $\{b_n\}$ を利用してもよい。

(1) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{a_n}}$ $\quad [\ b_n = \log_3 a_n\ ]$

(2) $a_1 = 1,\ \ na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ $\quad \left[\ b_n = \dfrac{a_n}{n}\ \right]$

(3) $a_1 = 1,\ \ (2n+3)(2n-1)a_{n+1} = (2n+1)^2 a_n$ $\quad \left[\ b_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}a_n\ \right]$

(4) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2}$ $\quad \left[\ b_n = \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1}\ \right]$

(5) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots\cdots + na_n = 2na_n + n^2$ $\quad [\ b_n = na_n\ ]$

25♠ 自然数 n に対し自然数 a_n，b_n は，$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす。

(1) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。 (2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(3) 数列 $\{a_n - b_n\sqrt{2}\}$ の一般項を求めよ。 (4) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

⋆⋆ 漸化式と確率・図形 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

26♠ K 先生は，ご機嫌の日の翌日にまたご機嫌である確率が $\dfrac{2}{3}$，不機嫌の日の翌日にご機嫌である確率は $\dfrac{1}{2}$ である。今日の K 先生はご機嫌のようだ。n 日後にご機嫌である確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，機嫌が普通の日はないものとする。

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ。 (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。 (3) p_n を求めよ。

27♠ (1) 点 P が正四面体 OABC の各頂点を 1 秒ごとに等確率で移動する。はじめ頂点 O にある点 P が n 秒後に頂点 O にある確率 p_n を求めよ。

(2) 袋 A に赤玉 1 個，白玉 3 個，袋 B には白玉 3 個が入っている。1 回の試行で袋 A の玉 1 個と袋 B の玉 1 個を無造作に選び交換する。この試行を n 回繰り返したあと，袋 A に赤玉が入っている確率 p_n を求めよ。

28◇ 数直線上の原点にある点 P を，コインを 1 回投げるごとに表が出れば 2 だけ，裏が出れば 1 だけ正の向きに進めていく。この試行を繰り返すとき，座標 n に点 P が止まる確率を p_n とする。

(1) p_1， p_2， p_3 を求めよ。 (2) p_{n+2} を p_{n+1}， p_n を用いて表せ。 (3) p_n を求めよ。

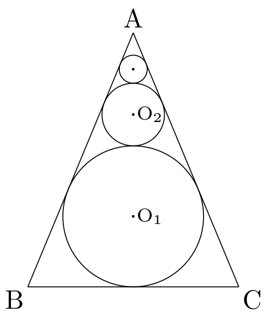
29♠ $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 13$，$\mathrm{BC} = 10$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に，図のように接する円 C_1， C_2， C_3，$\cdots\cdots$ を順に作り，その中心を $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}, \mathrm{O_3}, \cdots\cdots$ とする

(1) 円 C_1 の半径 r_1 を求めよ。

(2) 円 C_n の半径 r_n を求めよ。

(3) 円 C_n の面積を S_n とするとき，

$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_n$ を求めよ。



⋆⋆ 数学的帰納法 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

30. n が自然数のとき，次の等式・不等式を証明せよ。

(1)$^\sharp$ $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　(2)$^\sharp$ $n\,!>2^{n-1}\quad(n\geqq 3)$

(3)$^\spadesuit$ $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leqq\dfrac{2n-1}{n}$

31. (1)$^\sharp$ n は自然数とする。4^n-1 が 3 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。

(2)$^\spadesuit$ n は自然数とする。$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ。

32$^\sharp$ 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n を推定しその推定が正しいことを証明せよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{2},\ \ a_{n+1}=\dfrac{n}{a_n+n}$　　(2) $a_1=1,\ \ na_{n+1}a_n+(n+2)a_{n+1}-na_n=0$

33$^\diamondsuit$ $x^2-3x+1=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，$\alpha^n+\beta^n$ は整数となることを示せ。ただし n は自然数とする。

⋆⋆ その他の重要問題 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

34$^\diamondsuit$ 異なる n 個 $(n\geqq 2)$ の自然数の中から 2 個を取り出してつくった積の総和を求めよ。

35$^\diamondsuit$ $[x]$ は x を超えない最大の整数とするとき，次を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}[\sqrt{k}\,]$　　(2) $[\sqrt{k}\,]=m$ (m は整数) となる k の個数　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}\,]$