§2 統計的な推測

1. ♣ $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ のとき事象 A, B は互いに独立

目の和が奇数となるのは (偶数，奇数), (奇数，偶数) のとき

よって $P(A)=\dfrac{3\cdot 3\times 2}{36}=\dfrac{1}{2}$

目の積が 3 の倍数となるのは少なくとも 1 つが 3 の倍数であるから

余事象である「ともに 3 の倍数でない」の確率を引いて

$P(B)=1-\dfrac{4\cdot 4}{36}=\dfrac{5}{9}$

目の和が奇数かつ目の積が 3 の倍数は

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (5, 6), (6, 1),

(6, 3), (6, 5) の 10 通りであるから $P(A\cap B)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

したがって $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ であるから,

事象 A, B は <u>独立である</u>

♡ さいころ 2 個なので表を書いた方が確率も簡単かもね

2. 3 枚の取り出し方の総数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$

$X=3$ のとき他の 2 枚は 1 と 2 のときの 1 通り

$X=4$ のとき他の 2 枚は 1, 2, 3 から 2 枚より ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り

$X=5$ のとき ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通り，$X=6$ のとき ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 通り

したがって，X の確率分布は次の表のようになる

X	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$	1

(1) 表より $P(X\geqq 5)=\dfrac{6}{20}+\dfrac{10}{20}=\underline{\underline{\dfrac{4}{5}}}$

(2) $E(X)=3\cdot\dfrac{1}{20}+4\cdot\dfrac{3}{20}+5\cdot\dfrac{6}{20}+6\cdot\dfrac{10}{20}=\underline{\underline{\dfrac{21}{4}}}$

(3) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ ⟵ 分散はこの公式がお奨め

$=3^2\cdot\dfrac{1}{20}+4^2\cdot\dfrac{3}{20}+5^2\cdot\dfrac{6}{20}+6^2\cdot\dfrac{10}{20}-\left(\dfrac{21}{4}\right)^2$

$=\dfrac{567}{20}-\dfrac{441}{16}=\underline{\underline{\dfrac{63}{80}}}$ $\quad\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{63}{80}}=\underline{\underline{\dfrac{3\sqrt{35}}{20}}}$

3. ♣$E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$

(1) $E(X)=5$, $V(X)=36$ のとき

$E(Y)=E\left(-\dfrac{1}{3}X-4\right)$

$=-\dfrac{1}{3}E(X)-4=-\dfrac{1}{3}\cdot 5-4=\underline{\underline{-\dfrac{17}{3}}}$

$V(Y)=V\left(-\dfrac{1}{3}X-4\right)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2V(X)=\dfrac{1}{9}\cdot 36=\underline{\underline{4}}$

$\sigma(Y)=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$

(2) 取り出した赤玉の個数を X とすると，4 個の合計点 Y は

$Y=2X+4(4-X)=-2X+16$

$E(Y)$, $V(Y)$ を求めるために，まず $E(X)$, $V(X)$ を求める

1 個ずつ 4 回取り出す確率は同時に 4 個取り出す確率と等しいので

取り出し方の総数は ${}_6\mathrm{C}_4=15$ ↑普通に 4 回取り出してもよい

$X=2$ のとき，赤 2 白 2 より ${}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2=6$ 通り

$X=3$ のとき，赤 3 白 1 より ${}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_1=8$ 通り

$X=4$ のとき，赤 4 より ${}_4\mathrm{C}_4=1$ 通り

したがって，X の確率分布は次の表のようになる

X	2	3	4	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$E(X)=2\cdot\dfrac{6}{15}+3\cdot\dfrac{8}{15}+4\cdot\dfrac{1}{15}=\dfrac{8}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2^2\cdot\dfrac{6}{15}+3^2\cdot\dfrac{8}{15}+4^2\cdot\dfrac{1}{15}-\left(\dfrac{8}{3}\right)^2$

$=\dfrac{112}{15}-\dfrac{64}{9}=\dfrac{16}{45}$ $\quad$ これらを用いて

$E(Y)=E(-2X+16)=-2E(X)+16=-2\cdot\dfrac{8}{3}+16=\underline{\underline{\dfrac{32}{3}}}$

$V(Y)=V(-2X+16)=(-2)^2V(X)=4\cdot\dfrac{16}{45}=\underline{\underline{\dfrac{64}{45}}}$

4. ♣ $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

♣ X と Y が独立のとき

$E(XY)=E(X)E(Y)$

$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

$E(X)=4$, $V(X)=5$, $E(Y)=-2$, $V(Y)=3$ のとき

(1) $E(3X-2Y)=3E(X)-2E(Y)=3\cdot 4-2\cdot(-2)=\underline{\underline{16}}$

(2) X と Y は互いに独立より（独立でないときはダメ！）

$E(XY)=E(X)E(Y)=4\cdot(-2)=\underline{\underline{-8}}$

(3) X と Y は互いに独立より（独立でないときはダメ！）

$V(X-3Y)=V(X)+(-3)^2V(Y)=5+9\cdot 3=\underline{\underline{32}}$

(4) X と Y は互いに独立より（独立でないときはダメ！）

$V(2X+3Y)=2^2V(X)+3^2V(Y)=4\cdot 5+9\cdot 3=47$

したがって $\sigma(2X+3Y)=\underline{\underline{\sqrt{47}}}$

5. (1) 1 回目に出た目を X，2 回目に出た目を Y とすると

$Z=10X+Y$ である

まず $E(X)$, $V(X)$ を求める。X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\cdot\dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{1}{6}+5\cdot\dfrac{1}{6}+6\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\cdot\dfrac{1}{6}+2^2\cdot\dfrac{1}{6}+3^2\cdot\dfrac{1}{6}+4^2\cdot\dfrac{1}{6}+5^2\cdot\dfrac{1}{6}+6^2\cdot\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2$

$=\dfrac{91}{6}-\dfrac{49}{4}=\dfrac{35}{12}$

同様に $E(Y)=\dfrac{7}{2}$, $V(Y)=\dfrac{35}{12}$ であるから

$E(Z)=E(10X+Y)=10E(X)+E(Y)=10\cdot\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}=\underline{\underline{\dfrac{77}{2}}}$

また，X と Y は互いに独立であるから

$V(Z)=V(10X+Y)=10^2V(X)+V(Y)$

$=100\cdot\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{12}=\underline{\underline{\dfrac{3535}{12}}}$

(2) 3 個のさいころの出る目をそれぞれ X, Y, Z とすると

X と Y と Z は互いに独立であるから

$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z)$

まず $E(X)$ を求める。X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\cdot\dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{1}{6}+5\cdot\dfrac{1}{6}+6\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{2}$

同様に $E(Y)=\dfrac{7}{2}$, $E(Z)=\dfrac{7}{2}$ であるから

$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z)=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{7}{2}=\underline{\underline{\dfrac{343}{8}}}$

(3) $\mathrm{OP}^2=X^2+Y^2$ より

$E(\mathrm{OP}^2)=E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)$

X の確率分布は

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって $E(X^2)=1^2\cdot\dfrac{1}{4}+2^2\cdot\dfrac{1}{4}+3^2\cdot\dfrac{1}{4}+4^2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{2}$

同様に $E(Y^2)=\dfrac{15}{2}$ であるから

$E(\mathrm{OP}^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\dfrac{15}{2}+\dfrac{15}{2}=\underline{\underline{15}}$

♡ 注意 $\quad E(X^2)=E(X\cdot X)\neq E(X)E(X)$ である

2 つ目の X は 1 つ目の X に影響を受けるので独立ではないから

6. 1, 2, 2, 3, 3, 3 から 1 枚ずつ 2 回

(1) X と Y の同時分布は次の表のようになる

$\left(\text{たとえば } P(X=1,\,Y=2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5} \text{のように求めただけ}\right)$

X ＼ Y	1	2	3	計
1	0	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$
3	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{15}{30}$
計	$\frac{5}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{15}{30}$	1

(2) ♣ 注意 $E(XY)\neq E(X)E(Y)$ であるから XY の表を作る

XY の確率分布は次のようになる（(1) の表を利用して求めた）

XY	2	3	4	6	9	計
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

$E(XY)=2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{3}{15}+4\cdot\frac{1}{15}+6\cdot\frac{6}{15}+9\cdot\frac{3}{15}$

$=\frac{80}{15}=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{16}{3}}}}$

7. (1) $P(X=k)={}_6\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}$ より

X の確率分布は次のようになる

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

♣ この表の各確率が $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^6$ を二項定理で展開したときの各項に対応しており，この分布を二項分布という（反復試行は二項分布）

(2) ♣ 確率変数 X が二項分布 $B(n,\,p)$ に従うとき

$E(X)=np,\quad V(X)=np(1-p),\quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

確率変数 X が二項分布 $B\left(225,\,\frac{1}{5}\right)$ に従うとき

$E(X)=225\cdot\frac{1}{5}=\underline{\boldsymbol{45}}$

$V(X)=225\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\underline{\boldsymbol{36}}$

$\sigma(X)=\sqrt{36}=\underline{\boldsymbol{6}}$

(3) 2 つのさいころの目の和が 4 以下である確率は $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

180 回行うので，その回数 X は二項分布 $B\left(180,\,\frac{1}{6}\right)$ に従う

$E(X)=180\cdot\frac{1}{6}=\underline{\boldsymbol{30}}$

$V(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\underline{\boldsymbol{25}}$

$\sigma(X)=\sqrt{25}=\underline{\boldsymbol{5}}$

(4) 100 回引くときの当たりの回数を X とすると，貰える金額 Y は

$Y=500X+10(100-X)=490X+1000$

まず X の期待値と分散を求める

X は二項分布 $B\left(100,\,\frac{1}{10}\right)$ に従うから

$E(X)=100\cdot\frac{1}{10}=10,\quad V(X)=100\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=9$

よってもらえる金額 Y の期待値と標準偏差は

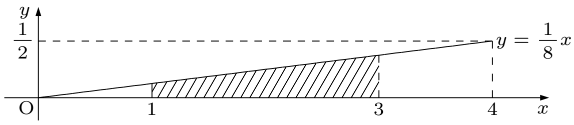
$E(Y)=E(490X+1000)=490E(X)+1000$

$=490\cdot10+1000=\underline{\boldsymbol{5900}}$

$V(Y)=V(490X+1000)=490^2V(X)=490^2\cdot9$ より

$\sigma(Y)=\sqrt{490^2\cdot9}=490\cdot3=\underline{\boldsymbol{1470}}$

8. (1) 確率密度関数 $f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\leqq x\leqq 4)$



$P(1\leqq X\leqq 3)$ は，図の斜線部分の面積であるから

$P(1\leqq X\leqq 3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\times2=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}}$

♡ 別解　面積だから積分で求めればよい（こっちが基本かも）

$P(1\leqq X\leqq 3)=\int_1^3\frac{1}{8}x\,dx=\left[\frac{1}{16}x^2\right]_1^3=\frac{1}{2}$

(2)♣$E(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)dx\quad\left(\longleftarrow\ E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k\ \text{のイメージ}\right)$

$E(X)=\int_0^4x\cdot\frac{1}{8}x\,dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{8}{3}}}}$

(3)♣$V(X)=\int_\alpha^\beta(x-E(X))^2f(x)dx$

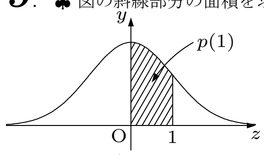
$\left(\uparrow\quad V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k\ \text{のイメージ}\right)$

$V(X)=\int_0^4\left(x-\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{8}x\,dx$

$=\frac{1}{8}\int_0^4\left(x^3-\frac{16}{3}x^2+\frac{64}{9}x\right)dx$

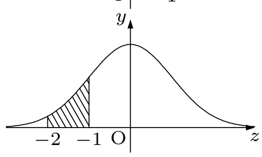
$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{16}{9}x^3+\frac{32}{9}x^2\right]_0^4=\underline{\underline{\boldsymbol{\frac{8}{9}}}}$

9. ♣ 図の斜線部分の面積を求める



(1) $P(0\leqq Z\leqq 1)$

$=p(1)=\underline{\boldsymbol{0.3413}}$

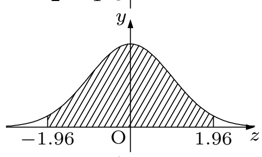


(2) $P(-2\leqq Z\leqq -1)$

$=p(2)-p(1)$

$=0.4772-0.3413$

$=\underline{\boldsymbol{0.1359}}$

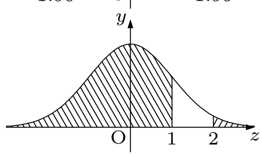


(3) $P(|Z|\leqq 1.96)$

$=2p(1.96)$

$=2\times0.4750$

$=\underline{\boldsymbol{0.95}}$



(4) $P(Z\leqq 1,\,2\leqq Z)$

$=0.5+p(1)+(0.5-p(2))$

$=1+0.3413-0.4772$

$=\underline{\boldsymbol{0.8641}}$

10. ♣ $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ とおくことで標準正規分布 $N(0,1)$ に従う

(1) X が正規分布 $N(40,5^2)$ に従うとき，$Z=\frac{X-40}{5}$ とおくと

Z は標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従うから

$P(25\leqq X\leqq 50)$　　　　$X=25$ のとき $Z=-3$

$=P(-3\leqq Z\leqq 2)$　　$\longleftarrow$ $X=50$ のとき $Z=2$

$=p(2)+p(3)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.4772+0.49865=\underline{\boldsymbol{0.97585}}$

(2) X が正規分布 $N(-23,49)$ に従うとき，$Z=\frac{X+23}{7}$ とおくと

Z は標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従うから

$P(X\geqq -30)$

$=P(Z\geqq -1)$　　$\longleftarrow$ $X=-30$ のとき $Z=-1$

$=0.5+p(1)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.5+0.3413=\underline{\boldsymbol{0.8413}}$

(3) X が正規分布 $N(11,\ 3.5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-11}{3.5}$

とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(15.48 \leqq X \leqq 16.74)$　　　$X=15.48$ のとき $Z=1.28$

$=P(1.28 \leqq Z \leqq 1.64)$　　$\longleftarrow X=16.74$ のとき $Z=1.64$

$=p(1.64)-p(1.28)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.4495-0.3997=$ **0.0498**

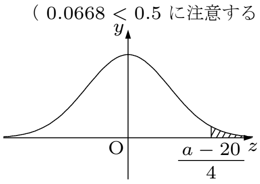
11. (1) X が正規分布 $N(20,\ 4^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-20}{4}$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(X \geqq a)=0.0668$ より

$P\left(Z \geqq \dfrac{a-20}{4}\right)=0.0668 \longleftarrow X=a$ のとき $Z=\dfrac{a-20}{4}$

($0.0668<0.5$ に注意すると図のようになる)



$0.5-p\left(\dfrac{a-20}{4}\right)=0.0668$

$p\left(\dfrac{a-20}{4}\right)=0.4332$

正規分布表の値より

$\dfrac{a-20}{4}=1.5$　　$\therefore$ **$a=26$**

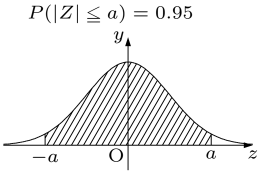
(2) X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(|X-m| \leqq a\sigma)=0.95$　は　$X-m=\sigma Z$ より

$P(|\sigma Z| \leqq a\sigma)=0.95$

$P(|Z| \leqq a)=0.95$



$2p(a)=0.95$

$p(a)=0.475$

正規分布表の値より

$a=1.96$

12. タイム X(秒) が正規分布 $N(12.6,\ 1.2^2)$ に従うとき

$Z=\dfrac{X-12.6}{1.2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う

(1) $P(X \leqq 12)$

$=P(Z \leqq -0.5)$　　$\longleftarrow X=12$ のとき $Z=-0.5$

$=0.5-p(0.5)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.5-0.1915=$ **0.3085**

(2) $P(12 \leqq X \leqq 13.5)$　　　$X=12$ のとき $Z=-0.5$

$=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0.75)$　　$\longleftarrow X=13.5$ のとき $Z=0.75$

$=p(0.5)+p(0.75)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.1915+0.2734=0.4649$　　$\therefore$ **46.5 %**

(3) タイムが 11.4 秒以下である高校生の割合は

$P(X \leqq 11.4)$

$=P(Z \leqq -1)$　　$\longleftarrow X=11.4$ のとき $Z=-1$

$=0.5-p(1)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.5-0.3413=0.1587$

この集団の総数を n とすると $n \times 0.1587=40$ より

$n=40 \div 0.1587=252.0\cdots$　したがって **約 252 人**

13. 点数 X(点) が正規分布 $N(44.5,\ 17^2)$ に従うとき

$Z=\dfrac{X-44.5}{17}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う

(1) $P(X \geqq 70)$

$=P(Z \geqq 1.5)$　　$\longleftarrow X=70$ のとき $Z=1.5$

$=0.5-p(1.5)$　　$\longleftarrow$ 図を書いて考えよう

$=0.5-0.4332=0.0668$

$320 \times 0.0668=21.376$　したがって **約 21 人**

(2) $P(X \geqq a)=0.1$ となる a を求める　$\longleftarrow$ 高い方から 10 %

$P\left(Z \geqq \dfrac{a-44.5}{17}\right)=0.1 \longleftarrow X=a$ のとき $Z=\dfrac{a-44.5}{17}$

$0.5-p\left(\dfrac{a-44.5}{17}\right)=0.1$ より　$\longleftarrow$ 左辺は図で考えよう

$p\left(\dfrac{a-44.5}{17}\right)=0.4$

正規分布表の値より $p(1.28)=0.3997 \fallingdotseq 0.4$ であるから

$\dfrac{a-44.5}{17} \fallingdotseq 1.28$　$\therefore a \fallingdotseq 66.26$

したがって $P(X \geqq 66.26) \fallingdotseq 0.1$ より **67 点以上**

♡ 別解　先に Z で考える解法

$P(Z \geqq u)=0.1$ となる u を求める　$\longleftarrow$ 高い方から 10 %

$0.5-p(u)=0.1$ より　$\longleftarrow$ 左辺は図を書いて考えよう

$p(u)=0.4$

正規分布表の値より $p(1.28)=0.3997 \fallingdotseq 0.4$ であるから

$u \fallingdotseq 1.28$

したがって $P(Z \geqq 1.28)=0.1$ であるから

$\dfrac{X-44.5}{17} \geqq 1.28$ より　$\longleftarrow Z=\dfrac{X-44.5}{17}$ を代入した

$X \geqq 1.28 \times 17+44.5=66.26$ したがって 67 点以上

14. (1) 確率変数 X が二項分布 $B\left(450,\dfrac{1}{3}\right)$ に従うとき

$m=E(X)=450 \times \dfrac{1}{3}=150$

$\sigma(X)=\sqrt{450 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}}=\sqrt{100}=10$ であるから

X は近似的に正規分布 $N(150,\ 10^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-150}{10}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(140 \leqq X \leqq 170)$　　　$X=140$ のとき $Z=-1$

$=P(-1 \leqq Z \leqq 2)$　　$\longleftarrow X=170$ のとき $Z=2$

$=p(1)+p(2)$　　$\longleftarrow$ 図で考える

$=0.3413+0.4772=$ **0.8185**

(2) 3 枚の硬貨を投げて表 2 枚裏 1 枚となる確率は

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$ であるから

X は二項分布 $B\left(960,\dfrac{3}{8}\right)$ に従う

$m=E(X)=960 \times \dfrac{3}{8}=360$

$\sigma(X)=\sqrt{960 \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{8}}=\sqrt{225}=15$ であるから

X は近似的に正規分布 $N(360,\ 15^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-360}{15}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(X \leqq 390)$

$=P(Z \leqq 2)$　　$\longleftarrow X=390$ のとき $Z=2$

$=0.5+p(2)$　　$\longleftarrow$ 図で考える

$=0.5+0.4772=$ **0.9772**

15. (1) 成功する回数 X は，二項分布 $B\left(600,\dfrac{2}{5}\right)$ に従うから

$m=E(X)=600 \times \dfrac{2}{5}=240$

$\sigma(X)=\sqrt{600 \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5}}=\sqrt{144}=12$ であるから

X は近似的に正規分布 $N(240,\ 12^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-240}{12}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(X \geqq 270)$

$=P(Z \geqq 2.5)$　　$\longleftarrow X=270$ のとき $Z=2.5$

$=0.5-p(2.5)$　　$\longleftarrow$ 図で考える

$=0.5-0.4938=$ **0.0062**

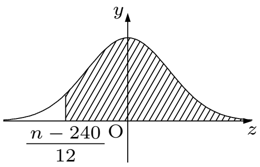
(2) $P(X \geqq n) = 0.9$ となる自然数 n を求める

X は正規分布 $N(240,\ 12^2)$ に従う

$Z = \dfrac{X-240}{12}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$P(X \geqq n) = 0.9$ より

$P\left(Z \geqq \dfrac{n-240}{12}\right) = 0.9$ $\qquad \left(※\dfrac{n-240}{12} < 0 \text{ に注意}\right)$



$0.5 + p\left(-\dfrac{n-240}{12}\right) = 0.90$

$p\left(-\dfrac{n-240}{12}\right) = 0.4$

正規分布表の値から

$p(1.28) = 0.3997 \fallingdotseq 0.4$ より

$-\dfrac{n-240}{12} \fallingdotseq 1.28$

$\therefore n \fallingdotseq 224.64$ 　であるから

$P(X \geqq 224.64) \fallingdotseq 0.9$

すなわち $n \leqq 224$ のとき確率 90 %を超えるので

その最大の数は **224 回**

16.♣ 非復元抽出はもとに戻さない，復元抽出はもとに戻す

(1) $\overline{X}$ の確率分布表を作る

$\overline{X} = 1$ (和が 2) は (1, 1) より $P(\overline{X}=1) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{45}$

$$P\left(\overline{X} = \frac{3}{2}\right) = \overset{(1,\,2)}{\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9}} + \overset{(2,\,1)}{\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{8}{45}$$

$$P(\overline{X} = 2) = \overset{(1,\,3)}{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{9}} + \overset{(3,\,1)}{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{9}} + \overset{(2,\,2)}{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{17}{45}$$

$$P\left(\overline{X} = \frac{5}{2}\right) = \overset{(2,\,3)}{\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9}} + \overset{(3,\,2)}{\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{8}{45}$$

(3, 3) のとき $P(\overline{X} = 3) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{45}$

$\overline{X}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	計
P	$\frac{6}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{17}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{6}{45}$	1

$E(\overline{X}) = 1 \cdot \dfrac{6}{45} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{8}{45} + 2 \cdot \dfrac{17}{45} + \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{8}{45} + 3 \cdot \dfrac{6}{45} = \mathbf{2}$

$V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - \{E(\overline{X})\}^2$

$= 1 \cdot \dfrac{6}{45} + \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{8}{45} + 4 \cdot \dfrac{17}{45} + \dfrac{25}{4} \cdot \dfrac{8}{45} + 9 \cdot \dfrac{6}{45} - 4$

$= \dfrac{196}{45} - \dfrac{180}{45} = \dfrac{16}{45}$

$\therefore \sigma(\overline{X}) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{5}}{15}}$

(2) ♣ 母平均を m，母標準偏差を σ，標本の大きさを n とすると

復元抽出のとき $E(\overline{X}) = m$，　$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

まず母平均 m と母標準偏差 σ を求める

母集団の変量を X とすると X の確率分布は（1 個を抽出したとき）

X	1	2	3	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

$m = 1 \cdot \dfrac{4}{10} + 2 \cdot \dfrac{2}{10} + 3 \cdot \dfrac{4}{10} = 2$

$\sigma = \sqrt{E(X^2) - m^2}$

$= \sqrt{1^2 \cdot \dfrac{4}{10} + 2^2 \cdot \dfrac{2}{10} + 3^2 \cdot \dfrac{4}{10} - 2^2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって $E(\overline{X}) = m = \mathbf{2}$

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

17. (1) 1 個のさいころを 1 回投げるときの出る目を X とすると

X の確率分布は（これが母集団分布である）

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$m = 1 \cdot \dfrac{1}{6} + 2 \cdot \dfrac{1}{6} + 3 \cdot \dfrac{1}{6} + 4 \cdot \dfrac{1}{6} + 5 \cdot \dfrac{1}{6} + 6 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{2}$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 2^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 3^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 4^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 5^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 6^2 \cdot \dfrac{1}{6}$

$= \dfrac{91}{6}$ 　より

$\sigma = \sqrt{E(X^2) - m^2} = \sqrt{\dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4}} = \sqrt{\dfrac{35}{12}} = \dfrac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}$

したがって $E(\overline{X}) = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$ $\qquad \left(\longleftarrow E(\overline{X}) = m\right)$

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{420}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ $\qquad \left(\longleftarrow \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

(2) 母平均 $m = 60.5$，母標準偏差 $\sigma = 6\sqrt{3}$

$E(\overline{X}) = 60.5$，　$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 3$ より

$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(60.5,\ 3^2)$ に従う

$\left(\text{公式：}\overline{X}\text{は } N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right) \text{ に従う，で求めてもよい}\right)$

$Z = \dfrac{\overline{X} - 60.5}{3}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(1,\ 0)$ に従うから

$P(\overline{X} \geqq 65)$ 　　$\longleftarrow$ 求める確率

$= P(Z \geqq 1.5)$ 　　$\longleftarrow$ $\overline{X} = 65$ のとき $Z = 1.5$

$= 0.5 - p(1.5)$ 　　$\longleftarrow$ 図で考える

$= 0.5 - 0.4332 = \mathbf{0.0668}$

18. (1) 1 個の種子につき発芽する確率は $\dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$

発芽する個数 X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{4}{5}\right)$ に従うので

$E(X) = n \cdot \dfrac{4}{5} = \boldsymbol{\dfrac{4n}{5}}$

(2) X_k の確率分布は（これが母集団分布である）

X_k	1	0	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

母平均 $m = 1 \cdot \dfrac{4}{5} + 0 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

母標準偏差 $\sigma = \sqrt{1^2 \cdot \dfrac{4}{5} + 0^2 \cdot \dfrac{1}{5} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{2}{5}$ より

$E(\overline{X}) = m = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$，　$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\sqrt{n}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5\sqrt{n}}}$

(3) ♣ n が大きくなれば $\sigma(\overline{X})$ は小さくなるよね

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{2}{5\sqrt{n}} \leqq 0.01$ 　となる n は

$40 \leqq \sqrt{n}$ より 　$n \geqq 40^2 = 1600$

したがって，少なくとも **1600 個以上** 必要である

19. ♣ 母比率を p，標本比率を R，標本の大きさを n とすると

期待値 $E(R) = p$，　標準偏差 $\sigma(R) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

(1) 母比率 0.4，標本の大きさ 600 より

$E(R) = \mathbf{0.4}$，　$\sigma(R) = \sqrt{\dfrac{0.4 \cdot 0.6}{600}} = \mathbf{0.02}$

(2) 母比率 0.2，標本比率 R，標本の大きさ 400 である

$E(R) = 0.2,\ \sigma(R) = \sqrt{\dfrac{0.2 \cdot 0.8}{400}} = 0.02$ より

標本比率 R は近似的に正規分布 $N(0.2, 0.02^2)$ に従うから

$\left(\text{公式}：R \text{ は } N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right) \text{に従う，で求めてもよい}\right)$

$Z = \dfrac{R - 0.2}{0.02}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う

$P(0.18 \leqq R \leqq 0.22)$　　　$R = 0.18$ のとき $Z = -1$

$= P(-1 \leqq Z \leqq 1)$　　$\longleftarrow$ $R = 0.22$ のとき $Z = 1$

$= 2p(1)$　$\longleftarrow$ 図で考える

$= 2 \times 0.3413 = \mathbf{0.6826}$

20. 母比率 $p = \dfrac{1}{3}$，相対度数が標本比率 R，標本の大きさ n

$\left(n \text{ 回中 3 の倍数の目が } T \text{ 回出るとすると } R = \dfrac{T}{n} \text{ ということ}\right)$

(1) $n = 200$ のとき

$$E(R) = \frac{1}{3},\ \ \sigma(R) = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{200}} = \frac{1}{30}$$

標本比率 R は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{1}{3}, \left(\dfrac{1}{30}\right)^2\right)$ に従うから

$Z = \dfrac{R - \frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う

$P\left(\left|R - \dfrac{1}{3}\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right)$　　$R - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{30}Z$ より

$= P\left(\left|\dfrac{1}{30}Z\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right) = P(|Z| \leqq 1.5)$

$= 2p(1.5) = 2 \times 0.4332 = \mathbf{0.8664}$

(2) $E(R) = \dfrac{1}{3},\ \ \sigma(R) = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$

標本比率 R は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{1}{3}, \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}\right)^2\right)$ に従うから

$Z = \dfrac{R - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う

$P\left(\left|R - \dfrac{1}{3}\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right) \geqq 0.95$　　$R - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}Z$ より

$P\left(\left|\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}Z\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right) \geqq 0.95$

$P\left(|Z| \leqq \dfrac{3\sqrt{n}}{20\sqrt{2}}\right) \geqq 0.95$

$2p\left(\dfrac{3\sqrt{n}}{20\sqrt{2}}\right) \geqq 0.95$　　$\therefore p\left(\dfrac{3\sqrt{n}}{20\sqrt{2}}\right) \geqq 0.475$

$p(1.96) = 0.4750$ より $\dfrac{3\sqrt{n}}{20\sqrt{2}} \geqq 1.96$

$\sqrt{n} \geqq \dfrac{1.96 \times 20\sqrt{2}}{3}$

$\therefore n \geqq \dfrac{1.96^2 \times 20^2 \times 2}{9} = \dfrac{3073.28}{9} \fallingdotseq 341.5$

したがって $\boldsymbol{n \geqq 342}$

21. ♣ 母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

(1) 標本平均 $\overline{X} = 172$, 母標準偏差 $\sigma = 6$, 標本の大きさ 100 より

母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$\left[172 - 1.96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{100}},\ 172 + 1.96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{100}}\right]$ より

$[170.824,\ 173.176]$　$\longleftarrow$ 問題に合わせて小数第 1 位までに

したがって **[170.8，173.2] ただし，単位は cm**

(2)♣ 母標準偏差が分からないとき，標本標準偏差 s を用いる

母平均に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

♣ 本問の標本標準偏差はデータの分析の平均，標準偏差で求めた

抜けた歯の本数 X	0	1	2	4	計
度数	5	2	2	1	10

標本平均 $\overline{X} = \dfrac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{10} = 1$

標本の分散　　$(\overline{X^2} - \overline{X}^2$ または $(X - \overline{X})^2$ の平均で求める)

$V = \dfrac{0^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1}{10} - 1^2 = \dfrac{16}{10}$

よって標本標準偏差 $s = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$

したがって母平均に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[1 - 1.96 \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}},\ 1 + 1.96 \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}}\right]$$

よって $[0.216,\ 1.784]$

したがって **[0.2，1.8] ただし，単位は 本**

22. ♣ 母比率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

(1) 標本比率 $R = \dfrac{630}{2100} = 0.3$，標本の大きさ 2100 より

内閣の支持率に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$\left[0.3 - 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.3 \cdot 0.7}{2100}},\ 0.3 + 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.3 \cdot 0.7}{2100}}\right]$ より

$[0.2804,\ 0.3196]$　　$\longleftarrow$ 割合は小数第 3 位まで

したがって **[0.280，0.320]**　　(%で小数第 1 位まで)

(2) 標本比率 $R = \dfrac{8}{400} = 0.02$，標本の大きさ 400 より

不良品の割合に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$\left[0.02 - 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.02 \cdot 0.98}{400}},\ 0.02 + 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.02 \cdot 0.98}{400}}\right]$ より

$[0.00628,\ 0.03372]$　したがってこのネジが 10 万本あるとき

628 本以上 3372 本以下くらいあると推定される

(3) 硬貨を投げて表が出る確率であるから

標本比率 R は $R = \dfrac{1}{2} = 0.5$ とみてよい

表が出る確率に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

したがって信頼区間の幅は

$R + 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} - \left(R - 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}\right)$

$= 2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$　　$\longleftarrow$ ここから計算してもよい

$= 2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = \dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$

したがって $\dfrac{1.96}{\sqrt{n}} \leqq 0.07$ より $\sqrt{n} \geqq \dfrac{196}{7} = 28$

よって $n \geqq 28^2 = 784$　　**784 回以上**投げればよい

23. (1) ♣ 確率が $\dfrac{1}{6}$ かどうか $\longrightarrow$ 両側検定

1 の目が出る確率を p とする

1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないとすると $p \neq \dfrac{1}{6}$ である

ここで $p=\dfrac{1}{6}$ であるという仮説を立てる

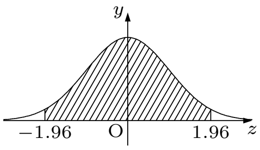
仮説が正しいとするとき，180 回のうち 1 の目が出る回数 X は

二項分布 $B\left(180, \dfrac{1}{6}\right)$ に従う

期待値 $m=180\cdot\dfrac{1}{6}=30$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}}=5$

であるから，X は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-30}{5}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う



正規分布表の値より
$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$
($P(0 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.475$)
であるから
有意水準 5 %の棄却域は
$Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z$ である

$X=39$ のとき $Z=\dfrac{39-30}{5}=1.8$ であり

この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない

すなわち **1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断できない**

(2) ♣ A の方が強いかどうか $\longrightarrow$ 片側検定

（A と B に実力差があるかどうかのときは両側検定）

A が勝つ確率を p とする

A の方が強いのならば $p>\dfrac{1}{2}$ である

ここで「A の方が強いとは言えない」，

すなわち $p=\dfrac{1}{2}$ であるという仮説を立てる

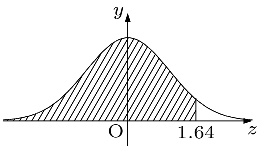
仮説が正しいとするとき，64 回のうち A が勝つ回数 X は

二項分布 $B\left(64, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う

期待値 $m=64\cdot\dfrac{1}{2}=32$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{64\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=4$

であるから，X は近似的に正規分布 $N(32,\ 4^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-32}{4}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う



正規分布表の値より
$P(Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.95$
($P(0 \leqq Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.45$)
であるから
有意水準 5 %の棄却域は
$Z \geqq 1.64$ である

$X=39$ のとき $Z=\dfrac{39-32}{4}=1.75$ であり

この値は棄却域に入るから，仮説を棄却できる

すなわち **A の方が強いと判断してよい**

24. (1) 無作為抽出した 144 個のボールについて，

標本平均を $\overline{X}$，母平均を m とする

「$m=145$ である」という仮説を立てる

標本の大きさが十分大きいと考えると，仮説が正しいとするとき

$E(\overline{X})=m=145$，$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{11}{\sqrt{144}}=\dfrac{11}{12}$ より

$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(145, \left(\dfrac{11}{12}\right)^2\right)$ に従う

$Z=\dfrac{\overline{X}-145}{\frac{11}{12}}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う

正規分布表の値より $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$ であるから

有意水準 5 %の棄却域は $Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z$ である

$\overline{X}=143$ のとき $Z=\dfrac{143-145}{\frac{11}{12}}=-\dfrac{24}{11} \fallingdotseq -2.18$ であり

この値は棄却域に入るから，仮説を棄却できる

すなわち **ボールの重さは表示通りではないと判断してよい**

(2) ♣ 標準偏差 10.8kg は標本標準偏差

母標準偏差 σ が不明のときは，標本標準偏差 s を用いる

無作為抽出した 100 人の男子高校生について，

A 高校の標本平均を $\overline{X}$，A 高校の母平均を m とする

「$m=61$ である」という仮説を立てる

標本の大きさが十分大きいと考えると，仮説が正しいとするとき

$E(\overline{X})=m=61$，$\sigma(\overline{X})=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{10.8}{\sqrt{100}}=1.08$ より

$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(61,\ 1.08^2\right)$ に従う

$Z=\dfrac{\overline{X}-61}{1.08}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う

正規分布表の値より $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$ であるから

有意水準 5 %の棄却域は $Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z$ である

$\overline{X}=63$ のとき $Z=\dfrac{63-61}{1.08} \fallingdotseq 1.85$ であり

この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない

すなわち **A 高校の男子生徒の体重の平均が全国の平均と異なるとは判断できない**

25. ♣ 5 年前から減ったかどうか $\longrightarrow$ 片側検定で図に注意

(1) 現在の朝食を毎日食べる高校生の比率を p とする

朝食を毎日食べる高校生が減ったのならば $p<\dfrac{9}{10}$ である

ここで「朝食を毎日食べる高校生が減ったとは言えない」，

すなわち $p=\dfrac{9}{10}$ であるという仮説を立てる

仮説が正しいとするとき，

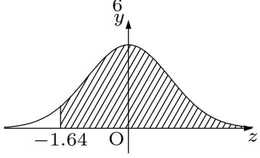
400 人のうち朝食を毎日食べる高校生の人数 X は

二項分布 $B\left(400, \dfrac{9}{10}\right)$ に従う

期待値 $m=400\cdot\dfrac{9}{10}=360$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{400\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{10}}=6$

であるから，X は近似的に正規分布 $N(360,\ 6^2)$ に従う

$Z=\dfrac{X-360}{6}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う



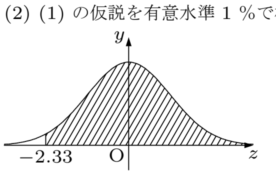
正規分布表の値より
$P(Z \geqq -1.64) \fallingdotseq 0.95$
であるから
有意水準 5 %の棄却域は
$Z \leqq -1.64$ である

$X=350$ のとき $Z=\dfrac{350-360}{6} \fallingdotseq -1.67$ であり

この値は棄却域に入るから，仮説を棄却できる

すなわち **朝食を毎日食べる高校生が減ったと判断してよい**

(2) (1) の仮説を有意水準 1 %で検定すると



正規分布表の値より
$P(Z \geqq -2.33) \fallingdotseq 0.99$
($P(-2.33 \leqq Z \leqq 0) \fallingdotseq 0.49$)
であるから
有意水準 5 %の棄却域は
$Z \leqq -2.33$ である

$X=350$ のとき $Z=\dfrac{350-360}{6} \fallingdotseq -1.67$ であり

この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない

すなわち **朝食を毎日食べる高校生が減ったと判断できない**

26. (1) 母比率 $p=0.55$ であるから

$E(R)=\dfrac{55}{100}=\dfrac{11}{20}$，$\sigma(R)=\sqrt{\dfrac{\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}}{1100}}=\dfrac{3}{200}$

標本比率 R は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{11}{20}, \left(\dfrac{3}{200}\right)^2\right)$ に従うから

$Z=\dfrac{R-\frac{11}{20}}{\frac{3}{200}}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う

$P\left(0.52 \leqq R \leqq 0.58\right)$ 　　$R=0.52$ のとき $Z=-2$

$=P(-2 \leqq Z \leqq 2)$ 　　$\longleftarrow$ $R=0.58$ のとき $Z=2$

$=2p(2)=2\times 0.4772=$ **0.9544**

(2) 標本比率 $R = \dfrac{360}{600} = 0.6$，標本の大きさ 600 より

内閣の支持率に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$\left[0.6 - 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.6 \cdot 0.4}{600}},\ 0.6 + 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.6 \cdot 0.4}{600}}\right]$ より

$[0.5608,\ 0.6392]$　　　$\longleftarrow$ 割合は小数第 3 位まで

したがって $\underline{\underline{\boldsymbol{[0.561,\ 0.639]}}}$　　　(%で小数第 1 位まで)

(3) こしあん派の比率を p とする

こしあん派の方が多いのならば $p > \dfrac{1}{2}$ である

ここで「こしあん派の方が多いとは言えない」，

すなわち $p = \dfrac{1}{2}$ であるという仮説を立てる

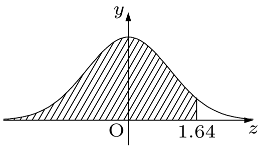
仮説が正しいとするとき，196 人のうちこしあん派の人数 X は

二項分布 $B\left(196, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う

期待値 $m = 196 \cdot \dfrac{1}{2} = 98$，標準偏差 $\sigma = \sqrt{196 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 7$

であるから，X は近似的に正規分布 $N(98,\ 7^2)$ に従う

$Z = \dfrac{X - 98}{7}$ とおくと Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う



正規分布表の値より

$P(Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.95$

$(\ P(0 \leqq Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.45\ )$

であるから

有意水準 5 %の棄却域は

$Z \geqq 1.64$ である

$X = 111$ のとき $Z = \dfrac{111 - 98}{7} \fallingdotseq 1.86$ であり

この値は棄却域に入るから，仮説を棄却できる

すなわち <u>**こしあん派の方が多いと判断してよい**</u>

27. (1) $P(X = k)$ は $k - 1$ 回目までに当たりを 1 本引き，

k 回目に 2 本目の当たりを引く確率であるが，この確率は，

まず同時に $k - 1$ 本のくじを引いて当り 1 本はずれ $k - 2$ 本で，

次に残り $n - (k - 1)$ 本から 1 本当りを引く確率と等しいので

$$P(X = k) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}}{{}_n\mathrm{C}_{k-1}} \times \frac{1}{n - (k - 1)}$$

$$= \frac{2 \cdot \dfrac{(n-2)\,!}{(k-2)\,!\,(n-k)\,!}}{\dfrac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k+1)\,!}} \times \frac{1}{n - k + 1} \quad \longleftarrow \text{約分できる}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{n(n-1)}{(k-1)(n-k+1)}} \times \frac{1}{n-k+1} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{2(k-1)}{n(n-1)}}}}$$

(2) ♣ 確率分布の表をイメージした方が $E(X)$ の式が分かる？

X	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	n	計
P				$\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$			1

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \quad \longleftarrow \text{期待値は } (x_k \times p_k) \text{ の和}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) \quad \longleftarrow k = 1 \text{ からにできる}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \right\}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1-3) = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{2(n+1)}{3}}}}$$

(3) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$$= \sum_{k=2}^{n} k^2 \cdot \frac{2(k-1)}{n(n-1)} - \left\{ \frac{2(n+1)}{3} \right\}^2$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} (k^3 - k^2) - \frac{4(n+1)^2}{9}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} - \frac{4(n+1)^2}{9}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{12} n(n+1)(n-1)(3n+2) - \frac{4(n+1)^2}{9}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{(n+1)(n-2)}{18}}}}$$