♠ 複素数平面と極形式，ド・モアブルの定理

1° 複素数 $\alpha = 1+\sqrt{3}i$，$\beta = 1-\sqrt{3}i$ とする。 [大阪教育大]

(1) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ の値を求めよ。

(2) $\dfrac{\alpha^8}{\beta^7}$ の値を求めよ。

(3) $z^4 = -8(1-\sqrt{3}i)$ を満たす複素数 z を求めよ。

2. 0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，

(1)° $-\overline{z}$，$\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。ただし，z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。 2016 [佐賀大・理工（改）]

(2)** $r=1$，$0<\theta<\pi$ とするとき，$z+1$ を極形式で表せ。 2014 [九州大（改）]

(3)••• $z-|z|$ を極形式で表せ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。 2016 [佐賀大・理工（改）]

3. (1)* 複素数 $z = 2\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi + i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)$ のとき，$\left|z-\dfrac{1}{z}\right|^2$ を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。 2015 [岩手大・工]

(2)• 複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta + \sqrt{3}(i\cos\theta - \sin\theta)$ において，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲を動くとき，$|\sqrt{2}z-1+i|$ の最大値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。 2016 [東京慈恵会医大]

4. (1)• 複素数 $z = \left(\dfrac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{n-4}$ が実数になるような自然数 n のうち，最も小さいものを求めよ。また，このときの z を求めよ。 [東京理科大]

(2)** 等式 $(i-\sqrt{3})^m = (1+i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち，m が最小となるときの m, n の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。 2016 [九州大・工 (後期)]

2016 [同志社大]

5** 複素数 $\alpha = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$ について，次の問いに答えよ。

(1) α^2 を計算せよ。

(2) α を極形式で表せ。ただし，α の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(3) 方程式 $z^3 = \alpha$ を解き，解を極形式で表せ。

(4) n を自然数とする。複素数 w_n を $w_n = (1+i)\alpha^n$ によって定めるとき，w_n が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

6. (1)• 2 次方程式 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ の解で虚部が正のものを α とする。$\alpha^{2m}-\sqrt{2}\alpha^m+1=0$ をみたす整数 m をすべて求めよ。 [京都工繊大]

(2)••• $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$，$n \geqq 1$ とする。このとき $\alpha_0 = \cos\dfrac{\theta}{n} + i\sin\dfrac{\theta}{n}$, $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおけば方程式 $z^n = \alpha$ のすべての解は $\alpha_0, \omega\alpha_0, \omega^2\alpha_0, \cdots\cdots, \omega^{n-1}\alpha_0$ で与えられることを示せ。 2014 [信州大]

[金沢大]

7* 複素数 $\alpha\,(\alpha \neq 1)$ を 1 の 5 乗根とし，$\overline{\alpha}$ を α に共役な複素数とするとき，次の問に答えよ。

(1) $\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$ であることを示せ。

(2) (1) を利用して，$t=\alpha+\overline{\alpha}$ は $t^2+t-1=0$ を満たすことを示せ。

(3) (2) を利用して $\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値を求めよ。

2016 [東京理科大・理工（改）]

8*** z を絶対値が 1，偏角が $\dfrac{3\pi}{5}$ の複素数とする。$t=z+\dfrac{1}{z}$ とおくとき次の問いに答えよ。

(1) t を $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ で表せ。

(2) $z^4-z^3+z^2-z+1=0$ を示せ。

(3) t の値を求めよ。

(4) $z^3+\dfrac{1}{z^3}$ を $\cos\dfrac{\pi}{5}$ で表せ。また，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

9. (1)** $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ \beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。また，$\gamma_n=\alpha^n+\beta^n\ (n=1,2,\cdots\cdots,12)$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{12}\gamma_n$ の値を求めよ。 2014 [立命館大]

(2)••• α が方程式 $x^{11}=1$ の虚数解であるとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\left|\alpha^k-\frac{i}{2}\right|^2$ の値を求めよ。 2004 [早稲田大]

10. (1)* 複素数 α が $|\alpha|=1$ をみたすとき，$|\alpha-(1+i)|=|1-\overline{\alpha}(1+i)|$ が成り立つことを示せ。ただし，$\overline{\alpha}$はαと 共役な複素数を表す。 [琉球大]

(2)*** α は複素数で $|\alpha|<1$ とする。複素数 z が $\left|\dfrac{\alpha+z}{1+\overline{\alpha}z}\right|<1$ をみたすための必要十分条件は，$|z|<1$ であることを証明せよ。ただし，複素数 w に対し $\overline{w}$ は w の共役複素数を，$|w|$ は $\sqrt{w\overline{w}}$ を表す。

[広島市立大]

[茨城大]

11•• $|z|=1$ である複素数 z について，次の各問に答えよ。ただし $|z|$ は z の絶対値，$\overline{z}$ は z の共役な複素数を表す。

(1) $z^2-\overline{z}$ が実数となるような z をすべて求めよ。

(2) $|z^2-\overline{z}|$ が最大となるような z をすべて求めよ。

[鹿児島大]

12••• α,β,γ はいずれも 0 でない複素数として，次の各問に答えよ。ただし，複素数 z に対して，$\overline{z}$ は z の共役な複素数，$|z|$ は z の絶対値を表す。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数ならば，$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つことを示せ。

(2) $\gamma+\overline{\gamma}=2|\gamma|$ が成り立つならば，γ は正の実数であることを示せ。

(3) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数であることを示せ。

♠図形への応用（１）

13. (1)$^\circ$ i を虚数単位とする。実数 a に対し，複素数平面上の 3 点 O(0), A(z), B(w) が $z=3+i$, $w=z^2+a$, ∠AOB$=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，a の値と三角形 OAB の面積を求めよ。2016 [東京都市大・工]

(2)* 複素数平面上で複素数 α, β の表す点をそれぞれ A, B とする。このとき，△OAB が正三角形であるための必要十分条件は

$\alpha \neq 0$ かつ $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$

であることを証明せよ。ただし，O は原点とする。 [静岡大]

[茨城大]

14* 複素数平面上で，O でない複素数 z を表す点を A とする。複素数 $(1+i)z$, $\dfrac{z}{1+i}$ を表す点をそれぞれ B, C とし，原点を O とする。

(1) ∠BOC を求めよ。

(2) 四角形 OBAC の面積を z を用いて表せ。

(3) 四角形 OBAC の対角線 OA と BC の交点を表す複素数を z を用いて表せ。

[長崎大]

15$^\bullet$ 複素数 α, β は $3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$, $|\alpha+\beta|=1$ をみたすとする。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。 (2) $\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)$ を求めよ。 (3) $|\beta|$ を求めよ。

(4) 複素数平面上で 0, α, β を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ。

16. (1)* 複素数 z_1, z_2, z_3 を表す複素数平面上の点を，それぞれ A, B, C とする。3 点 A, B, C が AB : BC : CA$=1:\sqrt{3}:2$ の三角形を作るとき，$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ を求めよ。 2016 [早稲田大・人間科学]

(2)$^{\bullet\bullet}$ 複素数平面上で，複素数 α, β, γ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。A, B, C が正三角形の 3 頂点であるとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0\cdots\cdots(*)$ が成立することを示せ。 [金沢大]

[横浜国大]

17** 異なる複素数 α, β, γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ を満たすとき

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で，3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC はどのような三角形か。

2014 [名古屋市大]

18*** (1) α, β, γ, δ を互いに異なる複素数とし，複素数平面上でこれらに対応する点をそれぞれ A, B, C, D とする。このとき，AB と CD が垂直となるための必要十分条件は，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数となることである。これを示せ。

(2) O を複素数平面上の原点とする。3 点 O, A, B が三角形をなすとき，△OAB の頂点 A, B よりその対辺 OB および OA に下してできる 2 つの垂線の交点を P とする。このとき OP と AB が垂直であることを，(1) を使って示せ。ただし，△OAB は直角三角形ではないとする。

♠図形への応用（２）

19* (1) α を実数でない複素数とし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき C は原点を通る円であることを示せ。 2015 [筑波大（改）]

(2)z が複素数平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき， [琉球大]

$w=(1-i)z-2i$

によって定められる点 w はどのような図形を描くか。

(3) 複素数平面上の点 z が $|z|=1$ を満たしながら動くとき，$w=\dfrac{(2+i)(z+i)}{z-2i}$ を満たす点 w はどのような図形上にあるか。 2014 [成城大]

[早稲田大]

20** 次の問に答えよ。

(1) 複素数 z が，$|z-1|=1$ をみたすとき，複素数平面上で $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ によって定まる点 w の軌跡を図示せよ。

(2) (1) の w について $iw+3i-4$ の偏角 θ の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

[お茶の水大]

21•• 複素数 z が $1\leqq|z|\leqq 2$ をみたすすべての範囲を動くとき，$w=\dfrac{z+i}{z-1}$ が複素数平面上を動く範囲を図示せよ。ただし，$z\neq 1$ とする。

[埼玉大]

22** $\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数値となるような複素数 z は複素数平面上でどのような図形をえがくか。

[一橋大]

23•• 複素数平面上に異なる 3 点 $z,\ z^2,\ z^3$ がある。

(1) $z,\ z^2,\ z^3$ が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2) $z,\ z^2,\ z^3$ が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また，$z,\ z^2,\ z^3$ が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

[熊本大]

24••• 0 でない複素数 z に対して，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とおくとき，次の問に答えよ。

(1) w が実数となるための z のみたす条件を求め，この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) w が実数で $1\leqq w\leqq\dfrac{10}{3}$ をみたすとき，z のみたす条件を求め，この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

[名古屋工大]

25** 複素数平面上で，3 つの複素数 $z,\ z^2,\ z^3$ の表す点をそれぞれ A, B, C とする。ただし，3 点 A, B, C は互いに異なっているとする。

(1) ∠ACB が直角になる複素数 z の全体が表す図形を求めよ。

(2) ∠ACB が直角でかつ AC=BC であるとき，複素数 z の値を求めよ。

2016 [筑波大]

26•• 複素数平面上を動く点 z を考える。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形をかけ。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

2015 [学習院大・理]

27• $a>0$ とする。複素数平面上で等式

$$|z-ia|=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

を満たす点 z 全体の表す図形を C とする。ただし，i は虚数単位で，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1) $z=x+iy$ と表すとき，C の方程式を $y=f(x)$ の形で表せ。

(2) C 上の点 z で

$$|z-(2+2i)|=|z+(2+2i)|$$

を満たすものを求めよ。

28** (1) 複素数 z と実数 t の間に $z=\dfrac{1}{t+i}$ の関係がある。t がすべての実数値をとって変わるとき，z は複素数平面上でどのような図形をえがくか。 [関西学院大]

(2) 複素数平面上の 2 点を $\mathrm{A}(-1+i),\ \mathrm{B}(2+i)$ とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が線分 AB 上を A から B まで動くとき，複素数 iz^2 が表す点は，複素数平面上でどのような図形を描くか図示せよ。 [大分大（改）]

2014 [関西大（改）]

29•• 2 つの複素数 $z=x+yi,\ w=u+vi$ ($x,\ y,\ u,\ v$ は実数) は $w=\dfrac{4}{z+1-i}$ という関係を満たしている。ただし，i は虚数単位である。

(1) $x,\ y$ を $u,\ v$ を用いて表せ。

(2) z が $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たして変化するとき，w の表す点が複素数平面上で動く領域を図示せよ。

(3) w の表す点が (2) で求めた領域を動くとする。このとき，w の偏角 $\arg w$ の最大値とそのときの w および z の値を求めよ。ただし，$-\pi\leqq\arg w<\pi$ であるとする。

(4) w の表す点が (2) で求めた領域を動くとする。このとき，$w-2i$ の絶対値 $|w-2i|$ の最大値とそのときの w および z の値を求めよ。

[お茶の水大]

30*** 複素数平面上に3点A$=1+i$，B$=i$，C$=1$を頂点とする三角形ABCを考える。ただし，iは虚数単位を表す。
(1) 点zが三角形ABCの周上を動くとき，iz^2はどんな図形上を動くか。図示せよ。
(2) (1)で定められた図形で囲まれた領域の面積を求めよ。

[広島大]

31•• 複素数平面上に，3点A$(-2i)$,B$(1-i)$,C$(-1+3i)$と，点D$(1+i)$を中心とする半径1の円Kがある。点P(z)はKの周上にあり，点Q(w)は，三角形APQと三角形ABCが同じ向きに相似になる点とする。（すなわち，AP : AQ=AB : ACで，APからAQに反時計まわりに測った角が，ABからACに反時計まわりに測った角に等しい）。このとき，次の問に答えよ。
(1) wをzの式で表せ。
(2) 点Pが円Kの周上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ。

[山形大]

32••• 複素数平面において，三角形の頂点O, A, Bを表す複素数をそれぞれ$0,\ \alpha,\ \beta$とするとき，次の問に答えよ。
(1) 線分OAの垂直二等分線上の点を表す複素数zは，$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$をみたすことを示せ。
(2) $\triangle$OABの外心を表す複素数を$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$を用いて表せ。
(3) $\triangle$OABの外心を表す複素数が$\alpha+\beta$となるときの$\dfrac{\beta}{\alpha}$の値を求めよ。

2016 [静岡大・理]

33••• αを絶対値が1の複素数とし，等式$z=\alpha^2\overline{z}$を満たす複素数zの表す複素数平面上の図形をSとする。ただし，$\overline{z}$はzと共役な複素数を表す。
(1) $z=\alpha^2\overline{z}$が成り立つことと，$\dfrac{z}{\alpha}$が実数であることは同値であることを証明せよ。また，このことを用いて，図形Sは原点を通る直線であることを示せ。
(2) 複素数平面上の点P(w)を直線Sに関して対称移動した点をQ(w')とする。このとき，w'をwとαを用いて表せ。

♠複素数平面の種々の問題

2016 ［早稲田大・教育（改）］

34[*] 2 つの複素数 $w,\ z\ (z \neq 0)$ の間に $w = z - \dfrac{7}{4z}$ という関係がある。また，z は複素数平面上で原点 O を中心として半径 $\dfrac{7}{2}$ の円周上を動くとする。次の問いに答えよ。

(1) z の偏角を θ とするとき，w を θ を用いて表せ。

(2) $w = x + yi\ (x,\ y$ は実数, i は虚数単位$)$ と表すとき w が描く曲線 C を座標平面上の x と y の方程式で表示せよ。

(3) (2) で得られた曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)\ (s > 0,\ t > 0)$ における曲線 C の接線が x 軸と交わる点を Q, y 軸と交わる点を R とする。このとき原点 O と Q と R を頂点とする直角三角形 $\triangle$OQR を y 軸の周りに 1 回転してできる円錐の体積の最小値を求めよ。

2016 ［三重大・教育，工 (後期)（改）］

35[***] i を虚数単位とする。

(1) 等式 $2\left|z - \dfrac{i}{3}\right| = \left|z - \dfrac{4i}{3}\right|$ を満たす複素数 z の軌跡を求め，z を極形式で表せ。

(2) 0 でない複素数 z が (1) の等式を満たしながら変化するとき，複素数 $z + \dfrac{1}{z}$ は，複素数平面上でどのような図形を描くか。その概形をかけ。

(3) 0 でない複素数 w が $|w-1| = |w-i|$ を満たしながら変化するとき，複素数 $w + \dfrac{1}{w}$ は，複素数平面上でどのような図形を描くか。その概形をかけ。

2016 ［北海道大・理系］

36[••] 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく。

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2) 点 z が C 上を 1 周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

2016 ［北海道大・理，工 (後期)］

37[***] 複素数平面上の 2 点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ が次の 2 つの条件を満たすとする。ただし，$\mathrm{O}(0)$ は原点である。

・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい。
・O を端とする半直線 OP 上に Q がある。

(1) z を w を用いて表せ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき，Q の軌跡を図示せよ。ただし，i は虚数単位である。

(3) $r > 0$ とし，β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする。P が点 $\mathrm{B}(\beta)$ を中心とする。半径 r の円上を 1 周するとき，Q の軌跡を求めよ。

2004 ［三重大・生物資源，医，工］

38[••] $p,\ q$ を実数とする。2 次方程式 $x^2 - 2px + q = 0$ は虚数解 z をもつものとする。

(1) $|z-1| \leqq 2$ となるとき，点 $(p,\ q)$ がどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。

(2) $p,\ q$ が $1 < -4p + q < 5$ を満たすとき，z がどのような範囲にあるかを複素数平面上に図示せよ。

♠複素数平面と漸化式

[北海道大]

39** 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1,\quad z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} z_n + 1\ (n = 1,\,2,\cdots\cdots)$$

を考える。ただし，i は虚数単位である。

(1) $z_2,\,z_3$ を求めよ。

(2) 漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

(3) 一般項 z_n を求めよ。

(4) $z_n = -\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

2014 [学習院大（改）]

40** 複素数平面上で正三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\ (n = 1,\,2,\,3,\cdots\cdots)$ を次の (A), (B) のように定める。

(A) $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \mathrm{R}_1$ はそれぞれ複素数 $0,\ 1,\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ で表される点である。

(B) $\begin{cases} \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{R}_n \\ \mathrm{Q}_{n+1}\text{は}\,\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\text{の中点} \\ \mathrm{R}_{n+1}\text{は三角形}\,\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\text{の外部にある。} \end{cases} \qquad (n = 1,\,2,\,3,\cdots\cdots)$

(1) $\mathrm{R}_2,\,\mathrm{R}_3$ を表す複素数 $z_2,\,z_3$ を求めよ。

(2) R_n を表す複素数を z_n とするとき，$z_n,\,z_{n+1},\,z_{n+2}$ の関係式を作り，z_n を求めよ。

2016 [広島大・理系（改）]

41*** 複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1 = 1$ である。
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2 = \dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha = \dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1) $z_3,\ z_4$ を求めよ。

(2) z_n を $\alpha,\,n$ を用いて表せ。

(3) P が $\mathrm{Q}_1(z_1),\,\mathrm{Q}_2(z_2),\cdots\cdots$ と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

[名古屋市大]

42$^{\bullet\bullet}$ 偏角 θ が 0 より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい複素数 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ を考える。
$z_0 = 0,\ z_1 = 1$ とし $z_k - z_{k-1} = \alpha(z_{k-1} - z_{k-2})$ $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ により $\{z_k\}$ を定義する。$k \geqq 0$ に対して複素数 z_k の表す複素数平面上の点を P_k とするとき，次の問に答えよ。

(1) z_k を α を用いて表せ。

(2) 複素数 $\dfrac{1}{1-\alpha}$ が表す複素数平面上の点を A とするとき，$\mathrm{AP}_0 = \mathrm{AP}_1 = \mathrm{AP}_2$ が成り立つことを示せ。

(3) $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_k, \cdots$ は同一円周上にあることを示せ。

2016 [早稲田大・基幹理工，創造理工，先進理工（改）]

43$^{\bullet\bullet\bullet}$ 複素数 z に対して

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

とする。ただし，$\alpha,\ \beta$ は複素数の定数で $\alpha \neq 1$ とする。

$$f^1(z) = f(z),\quad f^n(z) = f(f^{n-1}(z))\ (n = 2, 3, \cdots\cdots)$$

と定める。

(1) $f^n(z)$ を α, β, z, n を用いて表せ。

(2) $|\alpha| < 1$ のとき，すべての複素数 z に対して

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(z) - \delta| = 0$$

が成り立つような複素数の定数 δ を求めよ。

(3) $|\alpha| = 1$ とする。複素数の列 $\{f^n(z)\}$ に少なくとも 3 つの異なる複素数が現れるとき，これらの $f^n(z)\,(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ は複素数平面内のある円 C_z 上にある。円 C_z の中心と半径を求めよ。

2016 [金沢大・理工，医薬保健]

44$^{\bullet\bullet}$ 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a_n - \dfrac{\sqrt{6}}{4}b_n,\quad b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a_n + \dfrac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \end{cases}$$

を満たすものとする。a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1} = wz_n$ を満たす w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ。

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるかを答えよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 複素数平面上の 3 点 $0, z_n, z_{n+1}$ を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき，複素数平面上で $T_1, T_2, \cdots\cdots, T_n, \cdots\cdots$ によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。

2015 [同志社大]

45$^{\bullet\bullet}$ $i=\sqrt{-1}$ とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表すとする。

(1) 複素数 $z=2+i$ に対して，複素数 $z_1=(1+\sqrt{3}i)\overline{z}$ の値を求めよ。

(2) 実数 k と複素数 $z=1+ti$ (t は実数) に対して，次の等式が成立する $k,\ t$ の組をすべて求めよ。

$$(1+\sqrt{3}i)\overline{z}=kz$$

(3) 複素数 w_1 に対し，複素数 $w_2,\ w_3$ を

$$w_2=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_1},\ w_3=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_2}$$

によって定める。w_3 を w_1 を用いて表せ。

(4) (1) で求めた z_1 に対して，複素数 z_n ($n=2,\ 3,\cdots\cdots$) を

$$z_{n+1}=(1+\sqrt{3}i)\overline{z_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$$

によって定める。z_{2m-1} ($m=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$) を m を用いて表せ。

2015 [静岡大・情報，理，工]

46$^{\bullet\bullet\bullet}$ i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w=r\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく。また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める。

$$z_1=w,\quad z_{n+1}=z_nw^{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$$

(1) z_2 を r を用いて表せ。

(2) z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ。

(3) 複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする。$7\leqq n\leqq 48$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また，そのときの z_n の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ。

2016 [福井大・工]

47$^{\bullet\bullet\bullet}$ 複素数 z は，次に述べる規則 (A), (B) にしたがって，1 秒ごとに値が変化していくものとする。ただし，i を虚数単位として，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおき，$n=0\,1,\ 2,\cdots\cdots$ について，時刻 n 秒での z の値を z_n とおく。

(A) $z_0=1$ とする。

(B) z の値は, 時刻 $n+1$ 秒において, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で $z_{n+1}=\alpha z_n$ に，確率 $\dfrac{1}{2}$ で $z_{n+1}=\alpha^{-1}z_n$ に変化する。

$m=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$ について，$z_{2m}=\alpha^2$ となる確率を p_m，$z_{2m}=1$ となる確率を q_m とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $z_{2m}=-1$ となる確率を求めよ。

(2) q_m を p_m を用いて表せ。

(3) p_m を求めよ。

(4) $z_n=1$ となる確率を求めよ。