

§3 三角関数 ♠♡♣◇♠♡♣◇♠♡♣◇♠♡♣◇

★ 三角関数 ★★☆☆

1. 次の角の三角関数 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\theta = \frac{11}{6}\pi$ (2) $\theta = \frac{10}{3}\pi$ (3) $\theta = -\frac{5}{4}\pi$ (4) $\theta = \frac{3}{2}\pi$

2. (1) $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan \theta = -3$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。

3. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ($\pi < \theta < 2\pi$) のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin \theta + \cos \theta$ (3) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ (4) $\tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta}$

4. $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ ($\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$) のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$ (2) $\sin \theta$, $\cos \theta$

5[#] (1) $\cos \theta = \tan \theta$ のとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。

(2) $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$) のとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) $\tan \theta = 3$ のとき, $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta}$ の値を求めよ。

(4) 等式 $\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$ を証明せよ。

6. 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin(-\theta) + \cos(\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos(4\pi - \theta)$

(2)[#] $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta - \pi) - \cos\left(\theta - \frac{3}{2}\pi\right) \sin(\theta - 2\pi) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \tan(\pi - \theta)$

(3)[♠] $\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta$

7. 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = 2 \sin x$ (2) $y = \cos 3x$ (3) $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

(4)[#] $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (5)[#] $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ (6)[♠] $y = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

★ 加法定理とその応用 ★★☆☆

8. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ ($\pi < \beta < 2\pi$) のとき, 次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha + \beta)$ (2) $\cos(\alpha - \beta)$ (3) $\tan(\beta - \alpha)$

9. $\pi < \theta < 2\pi$ で, $\cos \theta = -\frac{3}{4}$ のとき, 次の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ (2) $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$

10. (1) $\sin \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ (2) $\cos \frac{5}{8}\pi$ の値を求めよ。

11. (1) 2 直線 $l: 3x - y - 2 = 0$, $m: x - 2y + 2 = 0$ のなす鋭角を求めよ。
 (2)[#] 点 (2, 1) を通り、直線 $5x - y - 3 = 0$ とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線の方程式を求めよ。
 (3)[#] O(0, 0), A(4, 0), B(3, 4) とする。∠AOB の二等分線である直線の方程式を求めよ。

12. (1)[#] 等式 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ を証明せよ。
 (2)[#] $\sin x + \cos y = 1$, $\cos x - \sin y = -\frac{1}{3}$ のとき、 $\sin(x - y)$ の値を求めよ。
 (3)[◆] $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = 5$, $\tan \gamma = 8$ で、 α, β, γ は鋭角であるとき、 $\alpha + \beta + \gamma$ の値を求めよ。

13. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。
 (1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ (2) $\sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta$ (3)[#] $3 \sin \theta - 4 \cos \theta$

★★ 方程式・不等式, 最大・最小 ★★ ★★ ★★

14. 次の方程式, 不等式を解け。
 (1) $\sin \theta > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) (2) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi$)
 (3) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ (4) $\tan \theta \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
 (5) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) (6) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)
 (7)[#] $\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \geq -1$ ($0 \leq \theta < \pi$) (8) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = -1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)
 (9)[#] $\sin 3\theta - \cos 3\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($0 \leq \theta < \pi$) (10)[#] $\sqrt{3} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

15. 次の方程式, 不等式を解け。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
 (1) $\cos 2\theta + (2 - \sqrt{3}) \cos \theta + 1 - \sqrt{3} = 0$ (2) $2 \sin^2 \theta \geq 3 \cos \theta$
 (3) $\cos 2\theta \leq \sin \theta$ (4)[#] $\sin 2\theta < \sin \theta$
 (5)[◆] $\sin 2\theta - 2 \cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (6)[◆] $\tan \theta > 2 \sin \theta$

16. 次の関数の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。ただし (4)(5) はそのときの x は求めなくてよい。

(1) $y = -3 \cos x - 1$ ($\frac{2}{3}\pi \leq x < \frac{7}{6}\pi$) (2) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 \leq x \leq \pi$)
 (3) $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) (4) $y = 2 \cos x - \sin x$
 (5)[#] $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) (6)[#] $y = \tan x + \frac{1}{\tan x}$ ($\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)

17. 次の関数の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)
 (2) $y = 2 \cos x - \cos 2x$ ($\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$)

18[#] 次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y = 2 \sin x + 2 \cos x - \sin 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq \pi)$

(2) $y = 3 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - \sin^2 x \quad (0 \leq x < \pi)$

19[▲] 関数 $y = 2 \sin x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) - \sqrt{3}a \sin x + a \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ について

(1) $t = -\sqrt{3} \sin x + \cos x$ とするとき、 y を t で表せ。

(2) 最小値が -3 のとき、 a の値を求めよ。

20[▲] (1) x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 xy の最小値およびそのときの x, y を求めよ。

(2) x, y が $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2 - y^2 - 2xy$ の最大値と最小値を求めよ。

★ その他の重要問題 ★★ ★★ ★★

21[#] 2次方程式 $5x^2 + ax - 2 = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき、定数 a の値と $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めよ。ただし $a > 0, 0 < \theta < \pi$ とする。

22[#] x についての方程式 $\sin^2 x + \cos x + 1 - k = 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$ について、

(1) この方程式が解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) この方程式の解の個数を調べよ。

23[▲] $f(x) = \cos 2x - 4k \sin x - 4k - 3$ とする。

(1) $f(x) = 0$ が $0 \leq x < 2\pi$ の範囲に異なる2つの解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $f(x) < 0$ が常に成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

24. (1) [#] 半径1の円に内接する三角形 ABC において $A = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 $2AB + AC$ の最大値を求めよ。

(2) [▲] $C = \frac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC において、辺 AC の中点を M, $AC = 4, \angle ABM = \theta$ とするとき、 θ が最大となるときの辺 BC の長さを求めよ。

(3) [▲] 方程式 $2 \sin \theta + \cos \theta = a \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ の解の個数を調べよ。ただし a は定数とする。

25[▲] (1) $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ を利用して $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

(2) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とするとき、 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ を t で表せ。

(3) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$ の大小を調べよ。

26[#] 次の方程式を解け。

(1) $\cos \theta = \cos \left(\theta - \frac{3}{5}\pi \right) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ (2) $\sin 4\theta = \cos \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

★★〈補〉和と積の公式 ★★ ★★ ★★

27★ (1) $\sin 2\theta \cos 4\theta$ を和の形にせよ。 (2) $\cos 5\theta - \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

28★ 次の式の値を求めよ。

(1) $2 \cos \frac{5}{12}\pi \cos \frac{1}{12}\pi$ (2) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$ (3) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

29★ (1) 方程式 $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を解け。

(2) 不等式 $\cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta < 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を解け。

30. (1)★ $\triangle ABC$ において等式 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ を証明せよ。

(2)◇ $\triangle ABC$ において等式 $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ を証明せよ。