§2　統計的な推測 ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇ ♠ ♡ ♣ ◇

⋆⋆ 確率変数と期待値，分散，標準偏差 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

1. 2 つのさいころを同時に投げる試行において，2 個の目の和が奇数であるという事象を A，2 個の目の積が 3 の倍数であるという事象を B とするとき，2 つの事象 A, B は独立であるか，従属であるかを調べよ。

2. 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出し，書かれている数の最大の数字を X とする。
(1) $P(X \geqq 5)$ を求めよ。　(2) X の期待値を求めよ。　(3) X の分散および標準偏差を求めよ。

3. (1) 確率変数 X の期待値が 5，分散が 36 であるとき，確率変数 $Y=-\dfrac{1}{3}X-4$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。
(2) 赤玉 4 個，白玉 2 個が入った袋から，玉を 1 個ずつ 4 回取り出す。取り出した玉はもとに戻さない。取り出された赤玉 1 個につき 2 点，白玉 1 個につき 4 点とするとき，4 個の合計点 Y の期待値および分散を求めよ。

4. 確率変数 X の期待値が 4，分散が 5，確率変数 Y の期待値が -2，分散が 3 で，X と Y は互いに独立であるとする。このとき次を求めよ。
(1) 期待値 $E(3X-2Y)$　(2) 期待値 $E(XY)$　(3) 分散 $V(X-3Y)$　(4) 標準偏差 $\sigma(2X+3Y)$

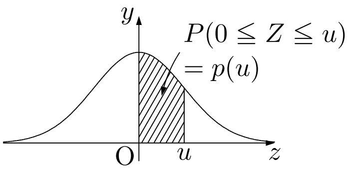
5. (1) 1 個のさいころを 2 回投げる。1 回目に出た目を十の位，2 回目に出た目を一の位とする数を Z とする。このとき，Z の期待値および分散を求めよ。
(2) 3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積の期待値を求めよ。
(3)$^\sharp$ 1 から 4 が書かれた正四面体の 2 つのさいころ A, B を同時に投げ，A, B の出た目をそれぞれ X, Y とする。座標平面上で $\mathrm{P}(X, Y)$ とするとき，OP^2 の期待値を求めよ。

6. 6 枚のカード 1, 2, 2, 3, 3, 3 から 1 枚ずつ 2 回カードを取り出す。1 回目と 2 回目に取り出されたカードの数をそれぞれ X，Y とする。ただし，取り出したカードはもとに戻さないとする。
(1) X と Y の同時分布を求めよ。　(2) XY の期待値を求めよ。

7. (1) 1 枚の硬貨を 6 回投げる試行において表が出る回数を X とするとき，X の確率分布を求めよ。
(2) 確率変数 X が二項分布 $B\left(225, \dfrac{1}{5}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。
(3) 2 つのさいころを同時に投げる試行を 180 回繰り返す。2 つのさいころの目の和が 4 以下となる回数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。
(4) $\dfrac{1}{10}$ の確率で当たりが出る，1 回 100 円のくじがある。当たりを引くと 500 円，はずれを引いたときは 10 円をもらえる。このくじを 100 回引くときのもらえる金額 Y の期待値と標準偏差を求めよ。

$\star^{\star}$ 正規分布 $\star^{\star}\star^{\star}\star^{\star}$

以下の問題において正規分布表から抜粋した $p(u)$ の値を必要に応じて用いること。



$p(0.5) = 0.1915,$	$p(0.75) = 0.2734,$	$p(1) = 0.3413$
$p(1.28) = 0.3997,$	$p(1.5) = 0.4332,$	$p(1.64) = 0.4495$
$p(1.96) = 0.4750,$	$p(2) = 0.4772,$	$p(2.33) = 0.4901$
$p(2.5) = 0.4938,$	$p(3) = 0.49865$	

8. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = \dfrac{1}{8}x\ (0 \leqq x \leqq 4)$ で表されるとき，次を求めよ。

(1) 確率 $P(1 \leqq X \leqq 3)$　　(2)$^\sharp$ 期待値 $E(X)$　　(3)$^\sharp$ 分散 $V(X)$

9. 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 1)$　　(2) $P(-2 \leqq Z \leqq -1)$　　(3) $P(|Z| \leqq 1.96)$　　(4) $P(Z \leqq 1,\ 2 \leqq Z)$

10. 確率変数 X が次の正規分布 $N(m,\,\sigma^2)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $N(40,\,5^2)$ のとき $P(25 \leqq X \leqq 50)$　　(2) $N(-23,\,49)$ のとき $P(X \geqq -30)$

(3) $N(11,\,3.5^2)$ のとき $P(15.48 \leqq X \leqq 16.74)$

11. 次の正規分布に従う確率変数 X について，等式が成り立つような定数 a の値を求めよ。

(1) $N(20,\,4^2)$ のとき $P(X \geqq a) = 0.0668$　　(2)$^\sharp$ $N(m,\,\sigma^2)$ のとき $P(|X-m| \leqq a\sigma) = 0.95$

12. ある高校生の集団で 100m 走を行った結果，平均タイムは 12.6 秒で標準偏差は 1.2 秒であった。タイムが正規分布に従うとき，次の問いに答えよ。

(1) ある高校生のタイムが 12 秒以下である確率を求めよ。

(2) タイムが 12 秒以上 13.5 秒以下の人は約何%か。小数第 1 位まで求めよ。

(3) タイムが 11.4 秒以下の高校生が 40 人だったとき，この集団の総数は約何人か。

13. 320 人でテストを行った結果，平均 44.5 点で標準偏差は 17.0 点であった。点数が正規分布に従うとき，次の問いに答えよ。

(1) 70 点以上は約何人か。　(2)$^\sharp$ 得点が高い方から 10 %に入るには何点以上とる必要があるか。

14. (1) 確率変数 X が二項分布 $B\left(450,\,\dfrac{1}{3}\right)$ に従うとき，$P(140 \leqq X \leqq 170)$ を求めよ。

(2) 3 枚の硬貨を同時に投げる試行を 960 回繰り返す。3 枚が表 2 枚裏 1 枚となる回数を X とするとき，$P(X \leqq 390)$ を求めよ。

15. 成功率が 40 %のクレーンゲームを 600 回行うとき，

(1) 270 回以上成功する確率を求めよ。

(2)$^\spadesuit$ 何回以上成功する確率であれば確率 90 %を超えるか，その最大の回数を答えよ。

$\star^\star$ 母集団と標本 $\star^\star\ \star^\star\star^\star$

16. 母集団を $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$ とする。

(1) 非復元抽出された大きさ 2 の標本 (X_1, X_2) について，標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

(2) 復元抽出された大きさ 5 の標本について，標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

17. (1) 1 個のさいころを 420 回投げるとき，出る目の平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

(2) ある全国模試の成績が平均 60.5 点，標準偏差 $6\sqrt{3}$ 点であった。この模試を受験した生徒から無作為に 12 人を抽出するとき，この 12 名の平均点が 65 点以上である確率を求めよ。

18. 発芽率が 80 %である種子から無作為に n 個の種子を抽出するとき，k 番目に抽出された種子が発芽したならば 1，発芽しなければ 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする。

(1) 発芽する種子の個数 X の期待値を求めよ。

(2) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n}$ とするとき，期待値 $E(\overline{X})$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を求めよ。

(3) $\sigma(\overline{X})$ を 0.01 以下にするためには，抽出される標本の大きさは少なくとも何個以上必要であるか。

19. (1) 特性 A の母比率を 0.4，大きさ 600 の無作為標本の標本比率を R とするとき，R の期待値と標準偏差を求めよ。

(2) ある政党の支持率が 20 %であるとき，無作為に抽出した 400 人のこの政党の支持率を R とする。R が 18 %以上 22 %以下である確率を求めよ。

20. 1 個のさいころを n 回投げるとき，3 の倍数の目が出る相対度数を R とする。

(1) $n = 200$ のとき，確率 $P\left(\left|R - \dfrac{1}{3}\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right)$ の値を求めよ。

(2) 確率 $P\left(\left|R - \dfrac{1}{3}\right| \leqq \dfrac{1}{20}\right) \geqq 0.95$ となるような n を求めよ。

$\star^\star$ 母平均の推定 $\star^\star\ \star^\star\star^\star$

21. (1) ある高校の 2 年生男子 100 人の身長の平均は 172.0cm であった。母標準偏差が 6.0 であるとき，母平均 m を信頼度 95 %で推定せよ。

(2) 40 歳の 10 人に抜けた歯の本数を聞いたところ 0 本が 5 名，1 本が 2 名，2 本が 2 名，4 本が 1 名であった。抜けた歯の本数が正規分布に従うとき，40 歳の抜けた歯の本数の平均を信頼度 95 %で推定せよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

22. (1) 無作為に抽出したある国の有権者 2100 人に内閣の支持率を調べたところ，支持する人は 630 人であった。この内閣の支持率を信頼度 95 %で推定せよ。

(2) ある工場で作られた大量のネジの山から無作為抽出によって 400 個を選んで調べたところ，8 個が不良品であった。このネジが 10 万本あるとき，不良品は何本くらいあると推定されるかを、95 %の信頼度で推定せよ。

(3)$^\sharp$ 硬貨を投げて表が出る確率を，信頼度 95 %で信頼区間の幅が 7 %以下になるように推定するには，硬貨を何回以上投げればよいか。

⋆⋆ 仮説検定 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

23. (1) あるさいころ 1 個を 180 回投げたところ，1 の目が 39 回出た。このさいころは 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

(2) 2 人の棋士 A, B における将棋の対戦成績は A の 39 勝 25 敗であった。A の方が強いと判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

24. (1) 重さ 145g と表示されている B 社の硬式野球のボールが大量にある。このボールの中から無作為に 144 個を抽出し重さを量ったところ，平均が 143g であった。母標準偏差が 11g であるとき，ボールの重さは表示通りではないと判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

(2) A 高校の男子生徒から無作為に 100 人を抽出したところ，体重の平均が 63kg で標準偏差が 10.8kg であった。全国の男子高校生の体重の平均は 61kg であるとき，A 高校の男子生徒の体重の平均が全国の平均と異なると判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

25$^\sharp$ 5 年前の調査で朝食を毎日食べる高校生は 90 %であった。無作為に 400 人の高校生を選んで調査したところ，350 人が毎日朝食を食べていた。朝食を毎日食べる高校生は 5 年前から減ったと判断してよいか。

(1) 有意水準 5 %で検定せよ。

(2) 有意水準 1 %で検定せよ。

⋆⋆ その他の重要問題 ⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆

26. つぶあん派かこしあん派かの調査を行った。

(1) 全世代におけるつぶあん派率は 55 %であることが分かっている。無作為に抽出した 1100 人におけるつぶあん派の比率を R とするとき，確率 $P(0.52 \leqq R \leqq 0.58)$ を求めよ。

(2) 60 代の 600 人を無作為に抽出したところ，つぶあん派は 360 人だった。60 代全体のつぶあん派率を信頼度 95 %で推定せよ。

(3) 無作為に抽出した高校生 196 人においては，こしあん派が 111 人でつぶあん派が 85 人であった。こしあん派の方が多いと判断してよいかを，有意水準 5 %で検定せよ。

27$^\spadesuit$ n 本 $(n \geqq 3)$ 中に当たりが 2 本のくじがある。このくじを 1 本ずつ引き，k 回目に 2 本目の当たりくじを引いたとき，$X = k$ とする。ただし取り出したくじは元に戻さない。

(1) $P(X = k)$ $(k = 2, 3, 4, \cdots\cdots, n)$ を求めよ。　　(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

$\boldsymbol{axz}$ axz $\overrightarrow{a}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\int dx \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$